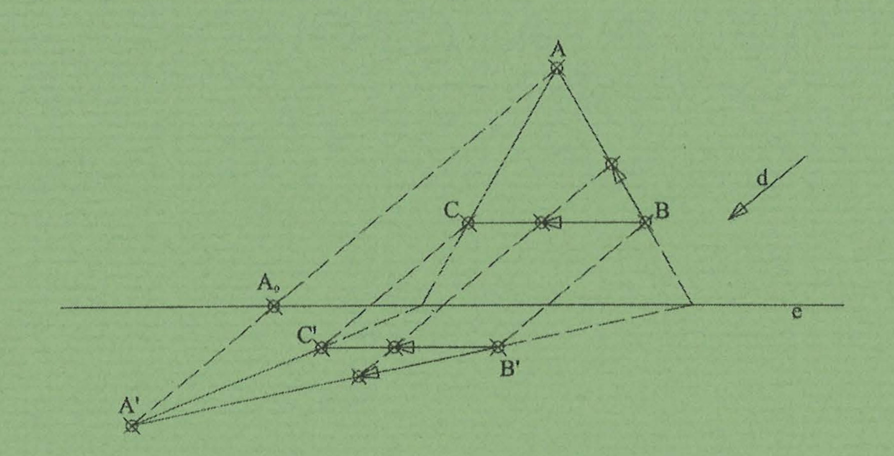
AFINIDADES, AFINIDADES EN EL PLANO

por

MANUEL IGLESIAS GUTIÉRREZ DEL ÁLAMO



CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

AFINIDADES, AFINIDADES EN EL PLANO

por

Manuel Iglesias Gutiérrez del Álamo

CUADERNOS
DEL INSTITUTO
JUAN DE HERRERA
DE LA *ESCUELA DE*
ARQUITECTURA
DE MADRID

Afinidades, afinidades en el plano.
© 2001 Manuel Iglesias Gutiérrez del Álamo
Instituto Juan de Herrera.
Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid.
Composición y maquetación: Daniel Álvarez Morcillo.
CUADERNO 107.01
ISBN: 84-95365-92-8
Depósito Legal: M-18629-2001

ÍNDICE

AFINIDADES

Def 1: Transformación afín:

Sean dos espacios afines $A=(X,V)$ y $B=(Y,W)$ con los espacios vectoriales definidos sobre un mismo cuerpo, se llama transformación afín de A en B a un par (f,φ) compuesto por :

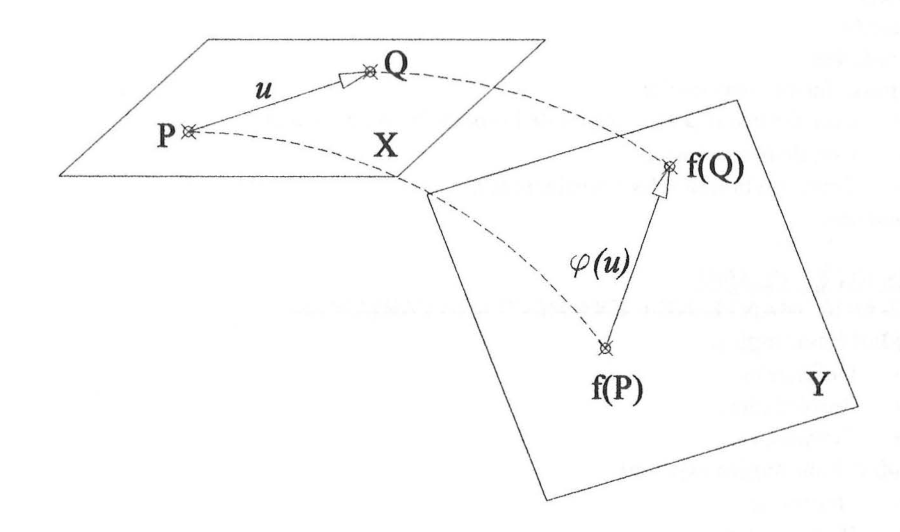
una aplicación: $X \xrightarrow{f} Y$

y

una aplicación lineal: $V \xrightarrow{\varphi} W$

que verifican:

$\forall P,Q \in X$, se verifica: $\varphi(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)}$.



Prop 1:

La condición:

$$\left.\begin{array}{l}\forall u \in V \\ y \\ \forall P \in X\end{array}\right\} f(P+u) = f(P) + \varphi(u)$$

es equivalente a:

$\forall P,Q \in X$, se verifica: $\varphi(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)}$.

Demostración:

1.- si se verifica : $\varphi(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)}$, entonces

$$\left.\begin{array}{l}\forall u \in V \\ y \\ \forall P \in X\end{array}\right\} f(P+u) = f(P) + \varphi(u):$$

Dado $P \in X$ y $u \in V$ sea el punto Q tal que:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{PQ}=u \Leftrightarrow P+u=Q \Rightarrow f(P+u)=f(Q) \\ \text{por hipotesis :} \\ \varphi\left(\overline{PQ}\right)=\overline{f(P)f(Q)} \Leftrightarrow f(Q)=f(P)+\varphi\left(\overline{PQ}\right)\end{array}\right\} \Rightarrow f(P+u)=f(P)+\varphi(u)$$

2.- Si se verifica :

$$\left.\begin{array}{l}\forall u \in V \\ y \\ \forall P \in X\end{array}\right\} f(P+u)=f(P)+\varphi(u), \text{ entonces } \varphi\left(\overline{PQ}\right)=\overline{f(P)f(Q)}:$$

$$\left.\begin{array}{r}\left.\begin{array}{l}\text{si } Q=P+u \\ \text{y} \\ f(P+u)=f(P)+\varphi(u)\end{array}\right\} \Rightarrow f(Q)=f(P)+\varphi(u) \\ \text{pero } u=\overline{PQ}\end{array}\right\} \Rightarrow f(Q)=f(P)+\varphi\left(\overline{PQ}\right) \Rightarrow \overline{f(P)f(Q)}=\varphi\left(\overline{PQ}\right)$$

Luego son equivalentes.

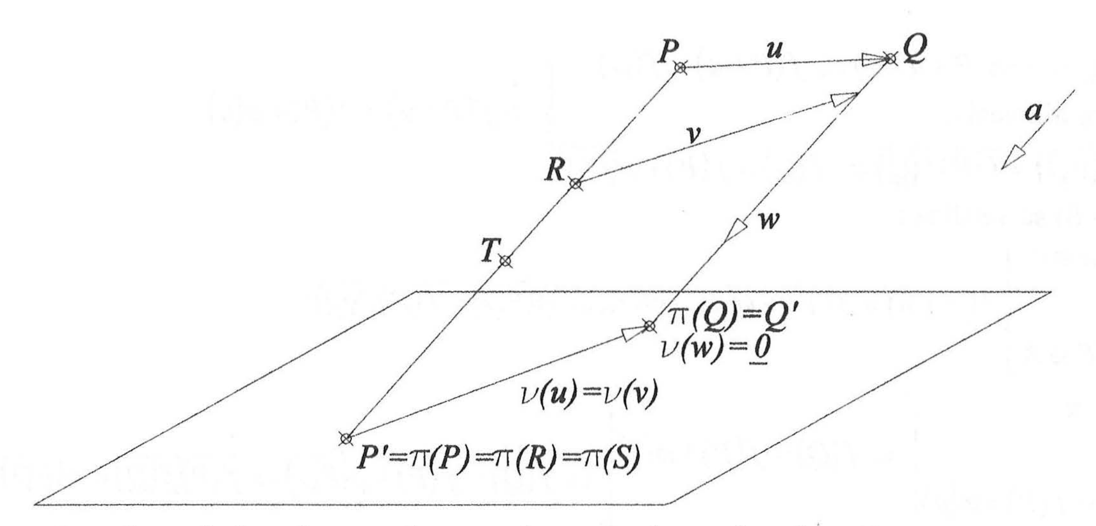
- En toda transformación afín, conocida la aplicación entre puntos f, queda determinada de forma única la aplicación lineal asociada φ, porque la condición $\overline{f(P)f(Q)}=\varphi\left(\overline{PQ}\right)$ define la aplicación vectorial.
- Conocida la aplicación lineal φ asociada a una aplicación afín, no queda determinada de forma única la aplicación entre puntos f, es preciso conocer además de φ, el transformado de un punto $f(P)$, para definirla a través de la condición:

$$\left.\begin{array}{l}\forall u \in V \\ y \\ \forall P \in X\end{array}\right\} f(P+u)=f(P)+\varphi(u)$$

Como ejemplo de transformación afín vamos a ver la Proyección, primero en el espacio afín tridimensional ordinario y después en un espacio afín genérico:

Proyección.

En el espacio afín ordinario E_3, consideremos una proyección π con dirección dada por un vector a, sobre un plano E_2.
La proyección de un punto P, $P'=\pi(P)$, será la intersección del plano E_2 con la recta que pasa por P con la dirección de a.
La proyección de cada uno de los puntos del espacio es única, puesto que la intersección entre recta y plano no paralelos, es un punto.



- *La aplicación lineal asociada viene determinada por la aplicación entre puntos y transformará vectores u en otros vectores $\upsilon(u)$, con la condición de ser los extremos del vector transformado $\upsilon(u)$ los transformados mediante la proyección de los extremos del vector u, es decir:*

$$\forall P,Q \in E_3, \upsilon(u) = \overline{\pi(P)\pi(Q)}, \text{ siendo } u = \overline{PQ}.$$

- *No es una aplicación inyectiva, pues un punto P' del plano no tiene un origen único, es la proyección de todos los puntos de la recta que pasando por él tiene la dirección de a:*

$$P' = \upsilon(P) = \upsilon(R) = \upsilon(T)\dots$$

- *La aplicación lineal asociada υ, tampoco es inyectiva, dos vectores diferentes u y v, pueden tener el mismo vector transformado $\upsilon(u) = \upsilon(v)$, si tienen sus orígenes en una recta con la dirección de a y sus extremos en otra paralela. El núcleo será la recta vectorial engendrada por a, los vectores proporcionales al vector a se transforman en el vector nulo:*

$$\upsilon(w) = \underline{o} \text{ y } w \in L(a), \text{ o lo que es igual } w = \alpha a,$$

$$\text{por tanto } Ker(\upsilon) = L(a)$$

La definición dada para la proyección sobre un plano, con una dirección dada se puede generalizar a un espacio afín cualquiera:

Definición:

Sea un espacio afín $A = (X,V)$ y $S \subset X$ un subespacio afín, $S = P + L$, sea $M \subset V$ un subespacio vectorial tal que es suplementario de la variedad de dirección de S, es decir:

$$L \cap M = \{\underline{0}\} \text{ y } L + M = V$$

Se llama proyección sobre S con la dirección de M a la aplicación:

$$X \xrightarrow{\pi} S$$

$$P \to \pi(P) = P'$$

Tal que:

$$P' = (P + M) \cap S$$

- *Al ser L y M suplementarios, el punto $\pi(P)$ es único.*

Propiedades:

1.- La recta que determinan un punto P y su transformado $\pi(P)$ tiene la dirección de M:

$\pi(P)$ es único y por definición $\pi(P) \in P + M \Leftrightarrow \overline{\pi(P)P} \in M$.

2.- Si las imágenes de dos puntos P y R coinciden, entonces dichos puntos están en una recta con variedad de dirección de M.

<u>Def 2</u>: Isomorfismo afín:

Se llama isomorfismo afín a toda transformación afín que verifica:

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ es biyeccion} \\ \text{y} \\ \varphi \text{ es isomorfismo} \end{array}\right\} \text{una condicion implica la otra.}$$

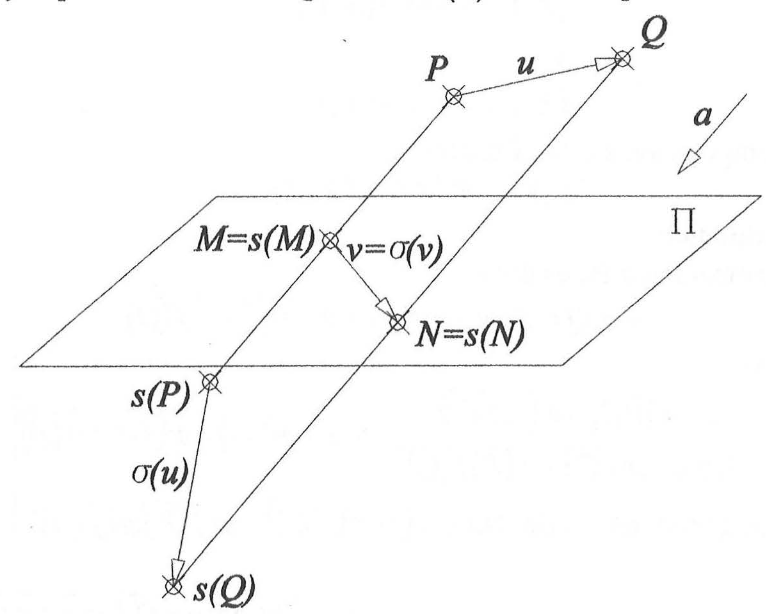
<u>Def 3</u>: Afinidad:

Se llama afinidad a todo isomorfismo afín de un espacio en si mismo.

Como ejemplo de afinidad veamos la simetría oblicua, como antes, primero en el espacio afín tridimensional ordinario y después en un espacio afín genérico:

<u>Simetría oblicua</u>

En el espacio afín ordinario E_3 definimos simetría oblicua respecto de un plano Π, con dirección dada por el vector a, a una transformación que asocia a cada punto del espacio P, otro punto $s(P)$, de modo tal que la recta que une los dos puntos P y $s(P)$ tenga la dirección de a y el punto medio del segmento $\overline{Ps(P)}$ esté en el plano Π.



La transformación así definida es una afinidad.

- *Cada punto del espacio tiene un único punto simétrico y cada punto es simétrico de algún otro, es decir, es una biyección.*
- *La aplicación lineal viene determinada por la aplicación entre puntos y es un isomorfismo.*

La definición dada para el espacio ordinario, también se puede generalizar para espacios afines de cualquier dimensión:

Definición:

Sea un espacio afín $A = (X, V)$ *y* $S \subset X$ *un subespacio afín,* $S = P + L$, *sea* $M \subset V$ *un subespacio vectorial suplementario de la variedad de dirección de* S, *es decir:*

$$L \cap M = \{\underline{0}\}$$

y

$$L + M = V$$

se llama simetría oblicua o simetría afín a la aplicación:

$$X \xrightarrow{s} X$$

$$P \to s(P) = P'$$

tal que:

- *El punto medio del segmento* $\overline{PP'}$ *pertenece a* S, *(los puntos medios son fijos),*
- *La variedad de dirección de la recta que determinan los puntos* P *y* $s(P)$ *está contenida en el subespacio* M.

  La transformación así definida es una biyección.

Composición de afinidades.

En un espacio afín $A = (X, V)$, sean dos afinidades:

$$(X,V) \xrightarrow{(f,\varphi)} (X,V)$$

y

$$(X,V) \xrightarrow{(g,\psi)} (X,V)$$

Se llama afinidad composición a otra afinidad:

$$(X,V) \xrightarrow{(g\circ f,\psi\circ\varphi)} (X,V)$$

La composición es afinidad:

a) Es transformación afín, es decir:

$$\forall P, Q \in X, \psi \circ \varphi(\overline{PQ}) = \overline{g \circ f(P) g \circ f(Q)}$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} \psi \circ \varphi(\overline{PQ}) = \psi(\varphi(\overline{PQ})) \\ (f,\varphi) \text{, es afinidad} \Leftrightarrow \varphi(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)} \end{array}\right\} \Rightarrow \psi \circ \varphi(\overline{PQ}) = \psi(\overline{f(P)f(Q)}) \\ \text{pero } (g,\psi) \text{, también es afinidad y } \psi(\overline{f(P)f(Q)}) = \overline{g(f(P))g(f(Q))} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \psi \circ \varphi(\overline{PQ}) = \overline{g \circ f(P) g \circ f(Q)}, \forall P, Q \in X$$

b) La composición de dos biyecciones f y g, $g \circ f$ es biyección.

c) La composición de dos isomorfismos φ y ψ, $\psi \circ \varphi$ es isomorfismo

Grupo afín:

El conjunto de las afinidades en un espacio afín $A=(X,V)$, es un grupo respecto de la composición, se llama grupo afín y lo designamos cono $G(A)$.

Demostración:

a) Es asociativo.

b) El elemento neutro será la identidad, (i,e), donde:

$$X \xrightarrow{i} X$$
$$P \rightarrow i(P)=P, \forall P \in X$$
y
$$V \xrightarrow{e} V$$
$$u \rightarrow e(u)=u, \forall u \in V$$

c) Todas las afinidades son inversibles, es decir:

$$\forall(f,\varphi)\in G(A), \exists(f^{-1},\varphi^{-1})/(g\circ f,\psi\circ\varphi)=(f\circ g,\varphi\circ\psi)=(i,e)$$

Demostración:

- f es biyección, luego existe f^{-1} y $\forall P',Q'\in X, \exists P,Q\in X / f^{-1}(P')=P, f^{-1}(Q')=Q$.
- φ es isomorfismo, luego existe φ^{-1} y $\forall u'\in V, \exists u\in V / \varphi^{-1}(u')=u$.
- (f^{-1},φ^{-1}) es afinidad:

$$\left.\begin{array}{r}\varphi^{-1}(\overline{P'Q'})=\varphi^{-1}(\overline{f(P)f(Q)}) \\ (f,\varphi)\text{es afinidad}\Rightarrow \overline{f(P)f(Q)}=\varphi(\overline{PQ})\end{array}\right\}\Rightarrow \varphi^{-1}(\overline{P'Q'})=\varphi^{-1}(\varphi(\overline{PQ}))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi^{-1}(\overline{P'Q'})=\overline{f^{-1}(P')f^{-1}(Q')}.$$

Determinación de una afinidad.

Prop 2:

Sea un espacio afín $A=(X,V)$ y una referencia $\mathfrak{R}=\{O,e_1,e_2.....e_n\}$, toda afinidad (f,φ) transforma $\mathfrak{R}$ en otra referencia $\mathfrak{R}'$.

Demostración:

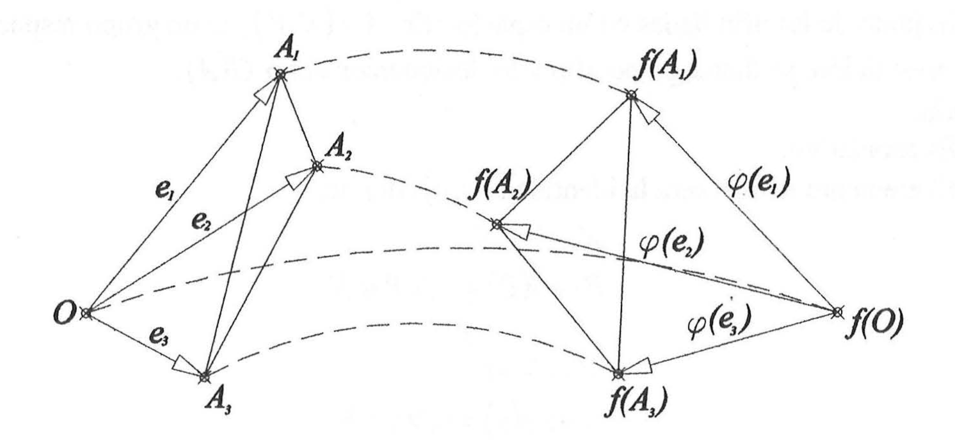
1.- φ es isomorfismo luego transforma una base de V en otra base de V, es decir:

$$\{\varphi(e_1),\varphi(e_2),\varphi(e_3).......\varphi(e_n)\}$$

es base de V.

2.- f es biyección luego $f(O)$ es único.

Por tanto $\mathfrak{R}'=\{f(O),\varphi(e_1),\varphi(e_2),\varphi(e_3).......\varphi(e_n)\}$ es una referencia.



Prop 3:

Dadas dos referencias $\Re = \{O, e_1, e_2 .... e_n\}$ y $\Re' = \{O', e_1', e_2' .... e_n'\}$ existe solo una afinidad (f, φ) que transforma $\Re$ en $\Re'$.

Demostración:

1.- Dadas $\{e_1, e_2 .... e_n\}$ y $\{e_1', e_2' .... e_n'\}$, dos bases de V sabemos que existe un único isomorfismo φ que transforma una base en la otra.

2.- Si definimos la a aplicación afín f de la siguiente forma:

$$X \xrightarrow{f} X$$
$$P \to f(P) = O' + \varphi(\overline{OP})$$

Se verifica:

a) f es inyectiva, es decir: si $f(P) = f(Q) \Rightarrow P = Q$

Demostración:

$$\forall P, Q \in X, f(P) = f(Q) \Leftrightarrow O' + \varphi(\overline{OP}) = O' + \varphi(\overline{OQ})$$

es decir

$$\varphi(\overline{OP}) = \varphi(\overline{OQ})$$

y como φ es isomorfismo :

$$\overline{OP} = \overline{OQ} \Leftrightarrow P = Q$$

b) f es sobreyectiva, es decir $\forall Q \in X, \exists P \in X / f(P) = Q$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \forall Q \in X, Q = O' + \overline{O'Q} \\ \text{y como } \varphi \text{ es isomorfismo :} \\ \exists u \in V / \varphi(u) = \overline{O'Q} \end{array}\right\} \Rightarrow Q = O' + \varphi(u) \\ \text{eligiendo } u \text{ de modo que : } O + u = P \Leftrightarrow \overline{OP} = u \end{array}\right\} \Rightarrow Q = O' + \varphi(\overline{OP}) \Leftrightarrow Q = f(P)$$

c) El par(f,φ), así definido es una afinidad, es decir: $\forall O,P \in X$, se verifica: $\varphi(\overline{OP}) = \overline{f(O)f(P)}$.

Demostración:

En la proposición 1 demostramos que:

La condición:

$$\left.\begin{array}{l}\forall u \in V \\ y \\ \forall P \in X\end{array}\right\} f(P+u) = f(P) + \varphi(u)$$

es equivalente a:

$\forall P,Q \in X$, se verifica: $\varphi(\overline{PQ}) = \overline{f(P)f(Q)}$,

basta con hacer $P = O$ y $Q = P$ y $f(O) = O'$.

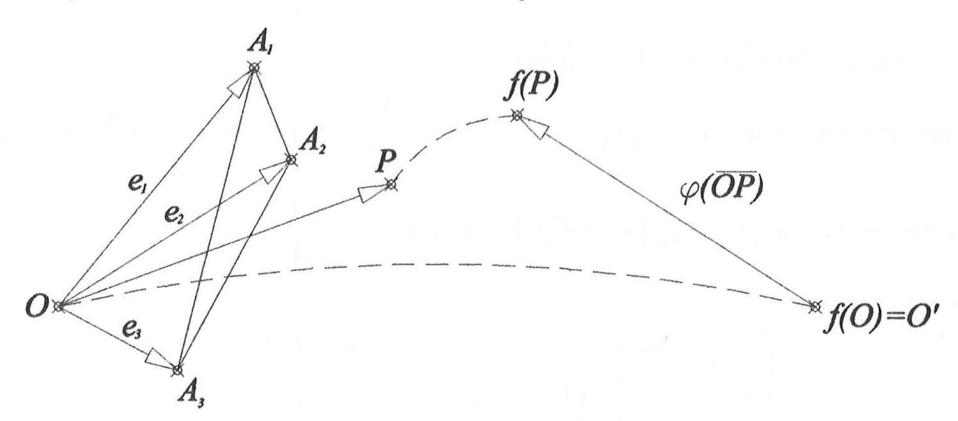
d) La aplicación así definida es única

Demostración:

Supongamos que existen dos afinidades así definidas (f,φ) y (g,ψ) diferentes, $\varphi = \psi$, al verificar que $\varphi(e_i) = e_i', \forall i \in (1,2,3...)$ (queda unívocamente determinada) y si verifican $f(O) = O'$ y $g(O) = O'$, resulta:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} f(P) = f(O) + \varphi(\overline{OP}) \\ f(O) = O' \end{array}\right\} \Rightarrow f(P) = O' + \varphi(\overline{OP}) \\ \text{además } g(O) = O' \\ \text{como } \varphi = \psi \end{array}\right\} \Rightarrow f(P) = g(O) + \psi(\overline{OP}) = g(P), \forall P \in X$$

- **Luego la aplicación así definida es afinidad y además es única.**



<u>**Conclusiones**</u>:

- La afinidad queda unívocamente determinada por la imagen de una referencia, que es necesariamente otra referencia.
- Transforma sistemas de puntos afinmente independientes en sistemas de puntos afinmente independientes y sistemas de puntos afinmente dependientes en sistemas de puntos afinmente dependientes.

- Existe una única afinidad (f,φ) tal que:

$$f(O)=O'$$

y

$$\varphi(e_i)=e_i',\forall i\in\{1,2,3.....n\}$$

Las dos bases determinan de modo único un isomorfismo φ y se define la biyección entre puntos como:

$$f(P)=O'+\varphi(\overline{OP})$$

es decir: el transformado de un punto P, se obtiene como la acción del vector transformado del vector de posición del punto P mediante el isomorfismo φ, sobre el origen O'.

Matriz de una afinidad:

Sea un espacio Afín $A=(X,V)$ y una referencia:

$$\Re=\{O,e_1,e_2,e_3......e_n\}$$

la afinidad (f,φ) queda unívocamente determinada si se conocen los transformados de los elementos de dicha referencia, es decir:

$f(O)$ de coordenadas $(a_1,a_2,a_3.........a_n)$

y

$$\varphi(e_i)=\sum a_{ij}e_j \quad \forall i\in\{1,2,3.......n\}$$

El vector de posición de $f(O)$ es : $\overline{Of(O)}=\sum_{i=1}^{n}a_ie_i$

La afinidad viene definida por: $\forall P\in X, f(P)=f(O)+\varphi(\overline{OP})$,

refiriendo al origen : $\overline{Of(P)}=\overline{Of(O)}+\varphi(\overline{OP})$

si las coordenadas de P son : $(x_1,x_2,x_3,...x_n)\Leftrightarrow \overline{OP}=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$

y las de $f(P)$ son : $(y_1,y_2,y_3,...y_n)\Leftrightarrow \overline{Of(P)}=\sum_{i=1}^{n}y_ie_i$

$$\Rightarrow y_i=a_i+\sum_{j=1}^{n}a_{i,j}x_j, \forall i\in\{1,2,3,...n\}$$

matricialmente:

$$\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\.\\.\\y_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\.\\.\\a_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&.&.&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&.&.&a_{2n}\\.&.&.&.&.\\.&.&.&.&.\\a_{n1}&a_{n2}&.&.&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$$

ó bien:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|ccccc} 1 & 0 & 0 & . & . & 0 \\ \hline a_1 & a_{11} & a_{12} & . & . & a_{1n} \\ a_2 & a_{21} & a_{22} & . & . & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_{n1} & a_{n2} & . & . & a_{nn} \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

- Las matrices de esta forma forman un grupo llamado grupo afín n-dimensional de K, se representa por: $GA_n(K)$.
- Cada referencia $\Re$ induce un isomorfismo $G(A) \to GA_n(K)$, que asocia a cada afinidad la matriz de bloques que la caracteriza en dicha referencia.

Cambio de referencia:

Sea la referencia $\Re = \{O, e_1, e_2, e_3 ...... e_n\}$ y una afinidad (f, φ) que tiene como expresión matricial respecto de dicha referencia:

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline P & A \end{array}\right) X \text{ o bien} : Y = P + AX$$

Dada otra referencia $\Re' = \{O', e_1', e_2', e_3' ..... e_n'\}$, la afinidad (f, φ), tendrá respecto de $\Re'$ otra expresión matricial:

$$Y' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline P' & A' \end{array}\right) X' \text{ o bien} : Y' = P' + A'X'$$

Existe otra afinidad $(g, \sigma) \in G(A)$ - automorfismo interior que transforma la referencia $\Re$ en la referencia $\Re'$ cuyas ecuaciones son:

$$X = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline Q & B \end{array}\right) X' \text{ o bien} : X = Q + BX'$$

y

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline Q & B \end{array}\right) Y' \text{ o bien} : Y = Q + BY'$$

y que relacionan las coordenadas de los puntos respecto de ambas referencias (ecuaciones de cambio de referencia).

La relación entre las dos ecuaciones de (f, φ), se obtendrá:

$$\left.\begin{array}{l} Y = P + AX \\ X = Q + BX' \\ Y = Q + BY' \end{array}\right\} \Rightarrow Q + BY' = P + A(Q + BX') \Rightarrow Q + BY' = P + AQ + ABX' \Rightarrow$$

$$BY' = P + (A - I)Q + ABX' \Rightarrow Y' = B^{-1}(P + (A - I)Q + ABX') \Rightarrow$$

$$Y' = B^{-1}(P + (A - I)Q) + B^{-1}AB$$

De modo que las matrices P' y A' serán:

$$P' = B^{-1}(P + (A - I)Q)$$

y

$$A' = B^{-1}AB$$

y la expresion matricial:

$$Y = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline B^{-1}(P + (A-I)Q) & B^{-1}AB \end{array}\right) X$$

- Se puede establecer una relación de equivalencia, que agrupa en cada clase todas las afinidades que solo se diferencian en un cambio de referencia, es decir que son esencialmente las mismas.

Prop 4:

Sea A un espacio afín y (f, φ) una afinidad si $S = P + L$ es un subespacio afín su transformado mediante la afinidad también lo es.

Demostración.

$S = P + L$ es subespacio afín luego: $X \in P + L \Leftrightarrow \overline{PX} \in L$

El transformado de un subespacio vectorial tambien lo es y: $\varphi(\overline{PX}) \in \varphi(L)$

Por ser afinidad se verifica: $\varphi(\overline{PX}) = \overline{f(P), f(X)}$

$\Rightarrow \overline{f(P), f(X)} \in \varphi(L) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f(X) \in f(P) + \varphi(L)$

Corolario:

- Si es isomorfismo afín transforma subespacios de dimensión n en otros de la misma dimensión, es decir rectas en rectas, hiperplanos en hiperplanos, etc...
- Conserva el paralelismo, es decir dos subespacios paralelos se transforman en subespacios paralelos.
- Transforma variedades que se cruzan en variedades que se cruzan.
- Conserva baricentros.
- Conserva alineaciones de puntos.
- Conserva razones simples.

Invariantes.

Def 4:

Sea (f, φ) una afinidad, se dice que un punto $P \in A$ es invariante si coincide con su transformado mediante la afinidad: $f(P) = P$

Prop 5:

Si $P, Q \in A$ son dos puntos invariantes mediante f, el vector $\overline{PQ}$ es invariante mediante φ.

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(\overline{PQ}) = \overline{f(P), f(Q)} \\ f(P) = P \\ f(Q) = Q \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi(\overline{PQ}) = \overline{PQ}$$

Prop 6:

El conjunto de puntos invariantes de una afinidad es un subespacio afín con variedad de dirección $V(1)$ (subespacio propio asociado al autovalor $\lambda = 1$), es decir:

$$E = \{P \in A \,/\, f(P) = P\} \text{ es subespacio.}$$

Demostración:

1.-

$$\left.\begin{array}{r} \text{Sea un punto fijo } A = f(A) \\ \text{por ser afinidad se verifica:} \\ \forall u \in V(1), f(A+u) = f(A) + \varphi(u) \end{array}\right\} \Rightarrow f(A+u) = A+u \text{, luego los puntos}$$

de $E = A + V(1)$ son todos fijos.

2.- Sean $A, B \in X \,/\, f(A) = A$ y $f(B) = B$, entonces:

$$\left.\begin{array}{l} f(B) = f(A + \overline{AB}) \\ \text{por ser afinidad: } f(B) = f(A) + \varphi(\overline{AB}) \\ \text{como: } f(A) = A \text{ y } f(B) = B \end{array}\right\} \Rightarrow B = A + \varphi(\overline{AB}) \Rightarrow \varphi(\overline{AB}) = \overline{AB} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \in V(1) \Rightarrow B \in A + V(1)$$

Def 5:

Al subespacio E invariante de una afinidad se le llama eje de la afinidad.

En general una recta r y su transformada $f(r)$ mediante una afinidad no son paralelas. Si consideramos la recta $r = P + L(u)$, de vector director u, el vector director de la recta transformada, $f(r)$, será $\varphi(u)$ y :

$$f(r) = f(P) + L\varphi(u).$$

Si se verifica:

$$\varphi(u) = \lambda u$$

entonces la recta y su transformada son paralelas **y se dice que la** dirección de la recta es invariante mediante la afinidad.

Además de la expresión anterior se deduce que las **direcciones invariantes** de una afinidad **corresponden a los subespacios propios de la aplicación lineal asociada.**

- El eje de la afinidad tiene una dirección invariante y además como $\varphi(\overline{PQ}) = \overline{PQ}$, siendo P y Q dos puntos del eje, le corresponde un autovalor $\lambda = 1$.
- No todo autovalor $\lambda = 1$ corresponde a un subespacio de puntos invariantes.

TRASLACIONES

Definición:

En un espacio afín $A=(X,V)$, sea un vector $u \in V$, se llama traslación de vector u a la correspondencia:

$$X \xrightarrow{t_u} X$$
$$P \to t_u(P)=P'$$
$$\text{tal que}:$$
$$t_u(P)=P+u$$

- Al conjunto de las traslaciones en un espacio afín le llamamos:

$$\mathrm{T}(A)=\{t_u / u \in V\}$$

Propiedades:

1) Por la definición de acción de un vector sobre un punto, se verifica:

$$\forall P,Q \in X, \exists! u \in V / t_u(P)=Q$$

2) Es una biyección.
3) Como consecuencia de las anteriores:

$$\text{Si } \exists P \in X / t_u(P)=t_v(P) \Leftrightarrow u=v, \forall u,v \in V.$$

4) La transformación vectorial asociada es la identidad.

a) $\forall P,Q \in X$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{t_u(P)t_u(Q)}=\overline{t_u(P)P}+\overline{PQ}+\overline{Qt_u(Q)} \\ \text{pero por definición}: \overline{t_u(P)P}=-u \\ \text{y } \overline{Qt_u(Q)}=u \end{array}\right\} \Leftrightarrow \overline{t_u(P)t_u(Q)}=-u+\overline{PQ}+u=\overline{PQ} \Leftrightarrow$$

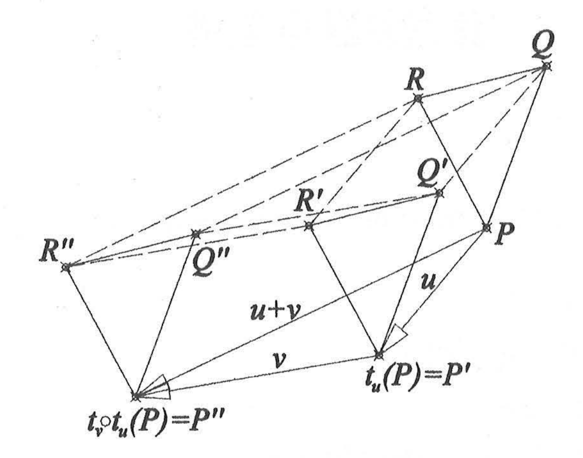
$$\Leftrightarrow \overline{t_u(P)t_u(Q)}=e\left(\overline{PQ}\right)$$

- **La composición de traslaciones es un grupo abeliano:**

a) La composición de dos traslaciones de vectores u y v, es otra traslación de vector $u+v$:

$$\left.\begin{array}{r} \left.\begin{array}{r} t_v \circ t_u(P)=t_v(t_u(P)) \\ t_u(P)=P+u \end{array}\right\} \Rightarrow t_u \circ t_v(P)=t_v(P+u) \\ \text{pero}: t_v(P+u)=(P+u)+v=P+(u+v) \end{array}\right\} \Rightarrow t_v \circ t_u(P)=P+(u+v)$$

b) La composición de traslaciones es asociativa.
c) El elemento neutro es la traslación de vector nulo.
d) Toda traslación de vector arbitrario u, tiene como elemento opuesto respecto de la composición otra traslación de vector $-u$.
e) La composición es conmutativa.



Ecuaciones:

Sea un espacio afín $A=(X,V)$, una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2,e_3......e_n\}$ y una traslación t_u:

$$\left.\begin{array}{r}\text{por definición}: t_u(P)=P+u\\ \text{refiriendo al origen } O\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{Ot_u(P)}=\overline{OP}+u$$

$$\text{refiriendo a la base del espacio vectorial}:\left\{\begin{array}{l}\overline{OP}=\sum_1^n x_i e_i\\ \overline{Ot_u(P)}=\sum_1^n y_i e_i\\ u=\sum_1^n u_i e_i\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \sum_1^n y_i e_i=\sum_1^n x_i e_i+\sum_1^n u_i e_i$$

matricialmente:

$$\begin{pmatrix}1\\y_1\\y_2\\.\\.\\y_n\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|ccccc}1 & 0 & 0 & . & . & 0\\ \hline u_1 & 1 & 0 & . & . & 0\\ u_2 & 0 & 1 & . & . & 0\\ . & . & . & . & . & .\\ . & . & . & . & . & .\\ u_n & 0 & 0 & . & . & 1\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x_1\\x_2\\.\\.\\x_n\end{pmatrix}$$

HOMOTECIAS

Definición:

En un espacio afín $A=(X,V)$, se llama homotecia de centro $C\in X$ y razón $k\in\Re$ a la aplicación:

$$X \xrightarrow{h_{C,k}} X$$
$$P \to h_{C,k}(P) = P'$$

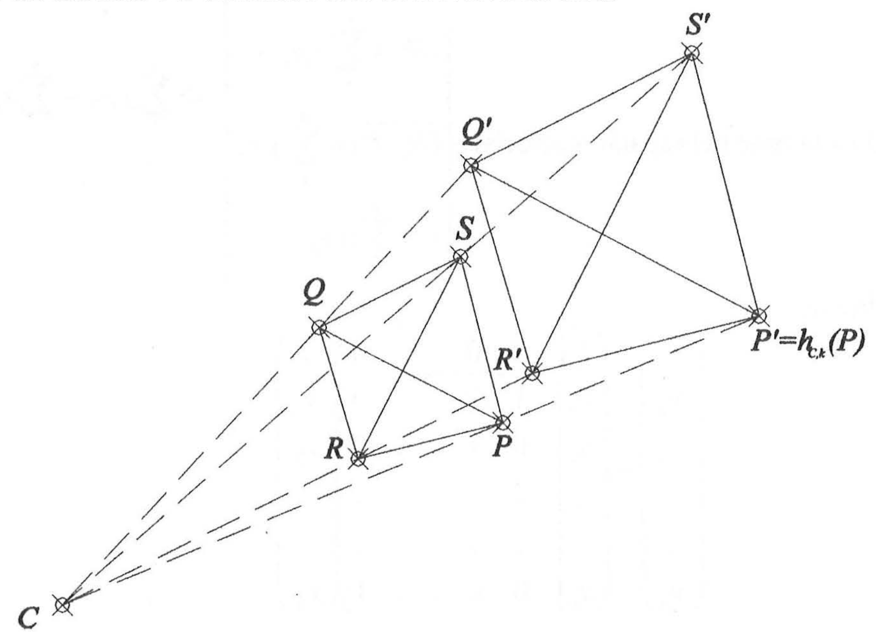
tal que:

a) C, P y P' estan alineados.

b) $\overline{CP} = k\overline{CP'}$

- Si $k>0$, se dice que es directa.
- Si $k<0$, se dice que es inversa.

En el espacio afín ordinario E_3, representamos como ejemplo el transformado de un tetraedro a mediante una homotecia directa.



Propiedades:

1) Es una biyección.
2) Conserva todas las direcciones en el espacio afín:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{h_{C,k}(P)h_{C,k}(Q)} = \overline{Ch_{C,k}(Q)} - \overline{Ch_{C,k}(P)} \\ \text{por definición de homotecia :} \\ \overline{Ch_{C,k}(Q)} = k\overline{CQ} \\ \overline{Ch_{C,k}(P)} = k\overline{CP} \\ k\overline{CQ} - k\overline{CP} = k\left(\overline{CQ} - \overline{CP}\right) \\ \overline{CQ} - \overline{CP} = \overline{PQ} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\overline{h_{C,k}(P)h_{C,k}(Q)} = k\overline{CQ} - k\overline{CP}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{h_{C,k}(P)h_{C,k}(Q)} = k\overline{PQ}$$

luego los segmentos $\overline{h_{C,k}(P)h_{C,k}(Q)}$ y $\overline{PQ}$ son paralelos $\forall P, Q \in X$.

Composición de homotecias:

Distinguimos dos casos:

1.- **Homotecias con el mismo centro:**

El conjunto de las homotecias concéntricas $H_{C,k} = \{h_{C,k} \,/\, k \in \Re\}$ de centro C tiene estructura de grupo abeliano respecto de la composición.

- La composición de homotecias del mismo centro es otra homotecia con igual centro y razón el producto de las razones:

Sean dos homotecias $h_{C,k}$ y $h_{C,k'}$ de centro C:

$$\left.\begin{array}{r} \text{por la primera: } \overline{Ch_{C,k}(P)} = k\overline{CP} \\ \text{por la segunda: } \overline{Ch_{C,k'}(Q)} = k'\overline{CQ} \\ \text{si } h_{C,k}(P) = Q \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{Ch_{C,k'}\left(h_{C,k}(P)\right)} = k'k\overline{CP}$$

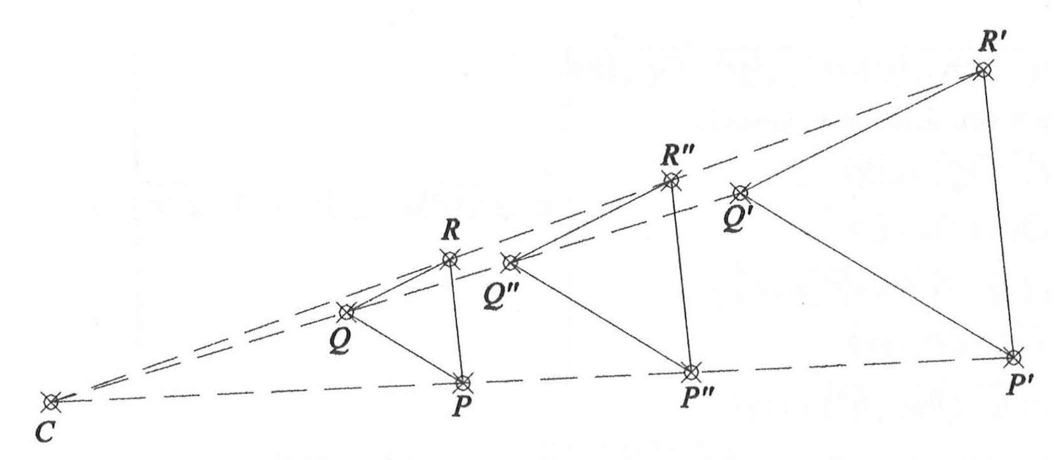
Ademas:

$$\left.\begin{array}{r} \text{por la primera: } C, P \text{ y } h_{C,k}(P) \text{ estan alineados,} \\ \text{por la segunda: } C, Q \text{ y } h_{C,k'}(Q) \text{ estan alineados} \\ \text{si } h_{C,k}(P) = Q \end{array}\right\} \Rightarrow C, P \text{ y } h_{C,k'}\left(h_{C,k}(P)\right)$$

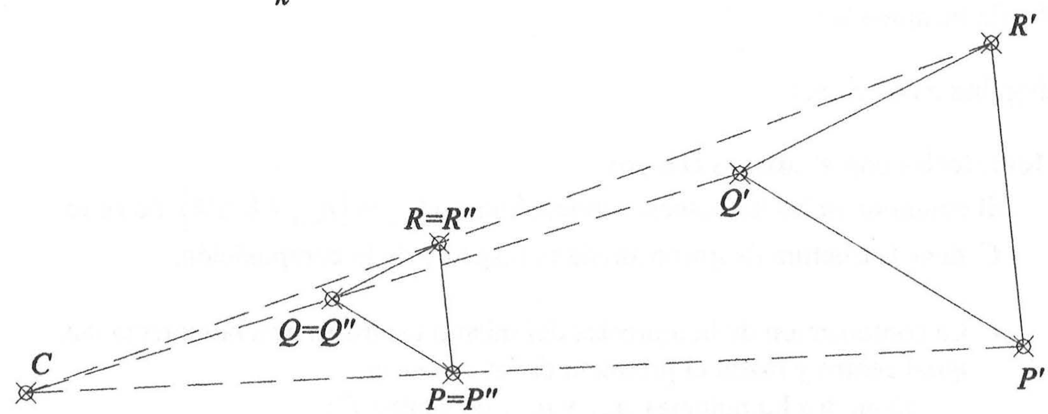
tambien estan alineados.

y por tanto : $h_{C,k'} \circ h_{C,k} = h_{C,kk'}$.

Las composiciones de homotecias las vamos a representar, como ejemplo en el espacio afín ordinario E_2.



- Si $k' = \frac{1}{k}$, el resultado es la identidad.

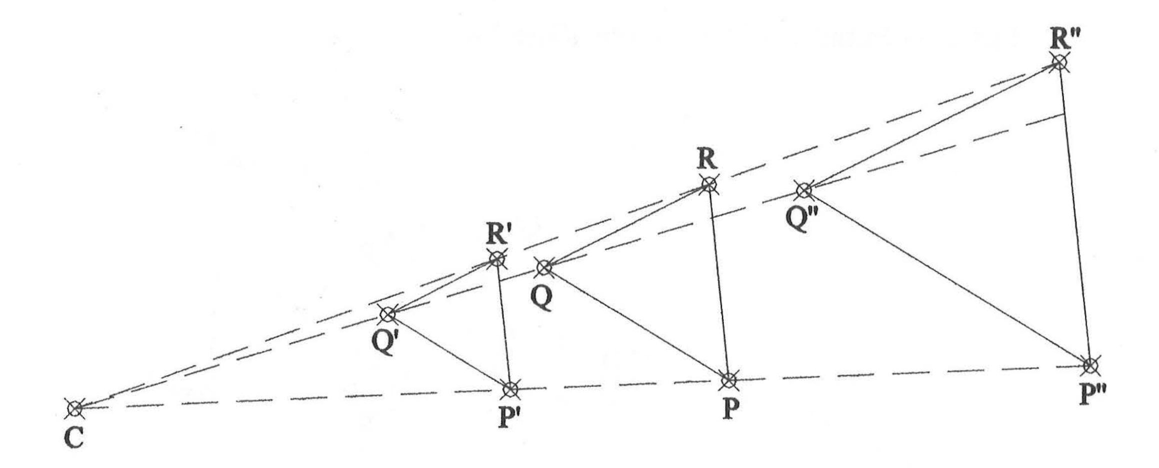


- Es asociativa:
$\forall h_{C,k}, h_{C,k'}, h_{C,k''} \in H_{C,k}(X)$ se verifica: $h_{C,k} \circ (h_{C,k'} \circ h_{C,k''}) = (h_{C,k} \circ h_{C,k'}) \circ h_{C,k''}$

- El elemento neutro es la homotecia de razón $k = 1$:
$\exists h_{C,1} \in H_{C,k}(X) \,/\, \forall h_{C,k} \in H_{C,k}(X)$ se verifica. $h_{C,k} \circ h_{C,1} = h_{C,1} \circ h_{C,k} = h_{C,k}$

- Toda homotecia de razón k tiene como elemento simétrico la homotecia de razón $\frac{1}{k}$:
$\forall h_{C,k} \in H_{C,k}(X), \exists h_{C,\frac{1}{k}} \in H_{C,k}(X) \,/\, h_{C,k} \circ h_{C,\frac{1}{k}} = h_{C,\frac{1}{k}} \circ h_{C,k} = h_{C,1}$

- Es conmutativa:
$\forall h_{C,k}, h_{C,k'} \in H_{C,k}(X)$ se verifica: $h_{C,k} \circ h_{C,k'} = h_{C,k'} \circ h_{C,k}$.



1.- **Homotecias con distinto centro:**

- La composición de homotecias con distinto centro es otra homotecia o una traslación:

Sean dos homotecias $h_{C,k}$ y $h_{C',k'}$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{por la primera :}\\ \overline{Ch_{C.k}(P)}=k\overline{CP}\Rightarrow\overline{CP}=\dfrac{\overline{Ch_{C.k}(P)}}{k}\\ \overline{Ch_{C,k}(Q)}=k\overline{CQ}\Rightarrow\overline{CQ}=\dfrac{\overline{Ch_{C.k}(Q)}}{k}\\ \overline{PQ}=\overline{CQ}-\overline{CP}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{PQ}=\frac{\overline{Ch_{C.k}(Q)}}{k}-\frac{\overline{Ch_{C.k}(P)}}{k}\Rightarrow$$

$$\overline{PQ}=\frac{\overline{h_{C.k}(P)h_{C.k}(Q)}}{k}\Leftrightarrow\overline{h_{C.k}(P)h_{C.k}(Q)}=k\overline{PQ}$$

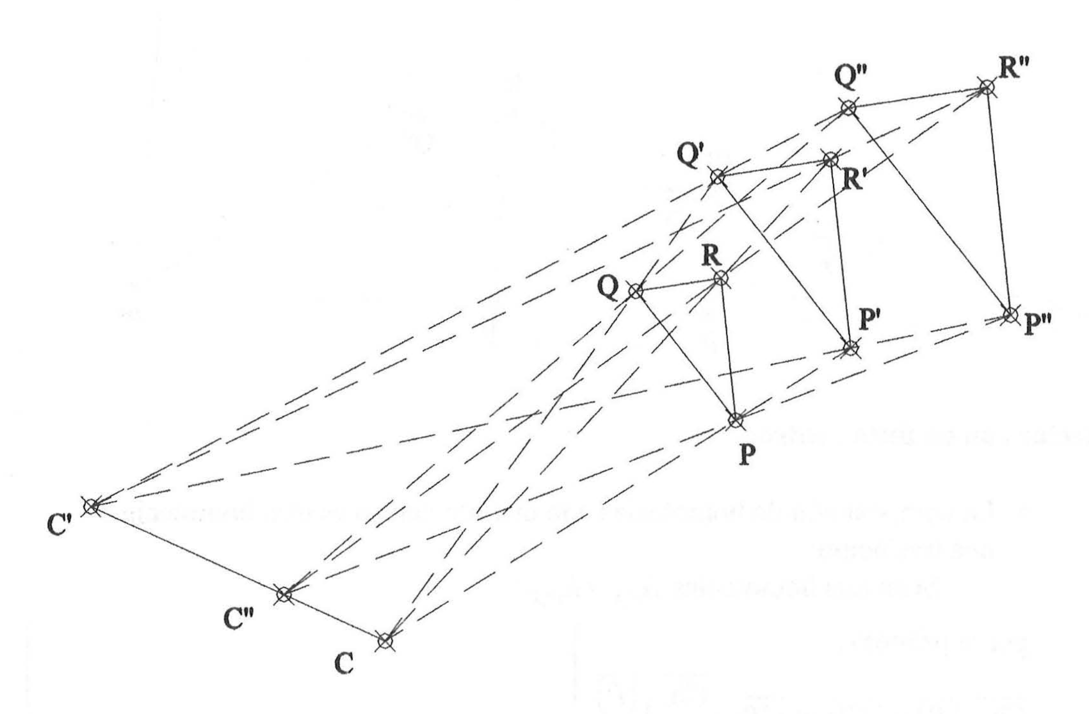
$$\left.\begin{array}{l}\text{por la segunda :}\\ \overline{C'h_{C'.k'}(P)}=k'\overline{C'P}\Rightarrow\overline{C'P}=\dfrac{\overline{C'h_{C'.k'}(P)}}{k'}\\ \overline{C'h_{C',k'}(Q)}=k'\overline{C'Q}\Rightarrow\overline{C'Q}=\dfrac{\overline{C'h_{C'.k'}(Q)}}{k'}\\ \overline{PQ}=\overline{C'Q}-\overline{C'P}\end{array}\right\}\Rightarrow\overline{PQ}=\frac{\overline{C'h_{C'.k'}(Q)}}{k'}-\frac{\overline{C'h_{C'.k'}(P)}}{k'}\Rightarrow$$

$$\overline{PQ}=\frac{\overline{h_{C'.k'}(P)h_{C'.k'}(Q)}}{k'}\Leftrightarrow\overline{h_{C'.k'}(P)h_{C'.k'}(Q)}=k'\overline{PQ}$$

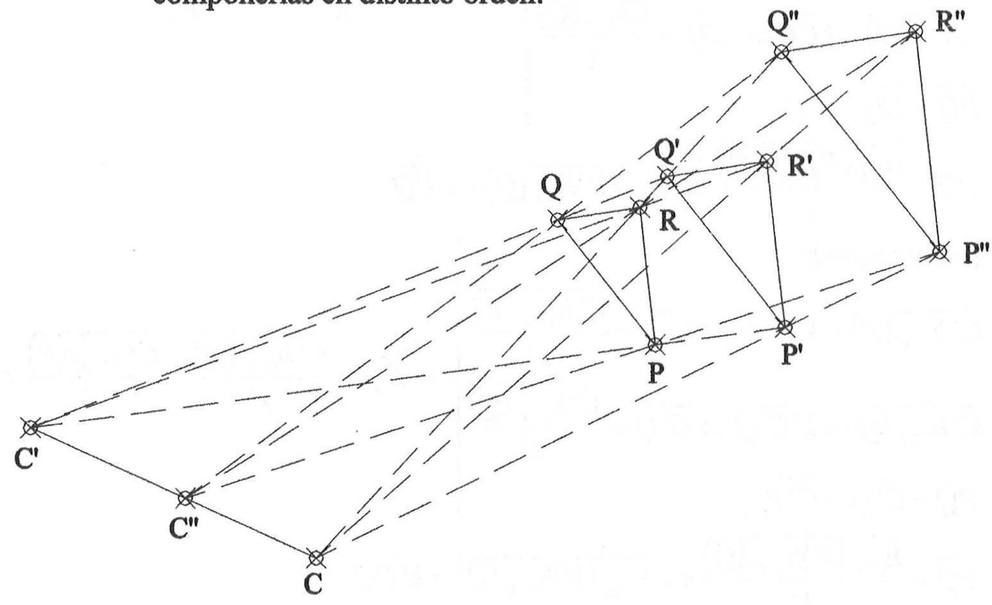
$$\Rightarrow\overline{h_{C'.k'}(h_{C,k}(P))h_{C'.k'}(h_{C,k}(Q))}=k'k\overline{PQ}$$

Por tanto si el producto $kk'\neq 1$, es otra homotecia : $h_{C,k'}\circ h_{C,k}=h_{C,kk'}$

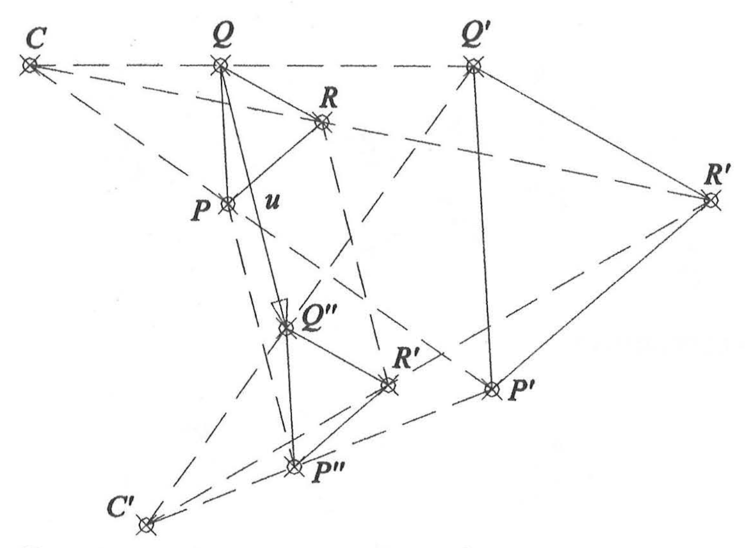
- Los tres centros C, C' y C'' están alineados.



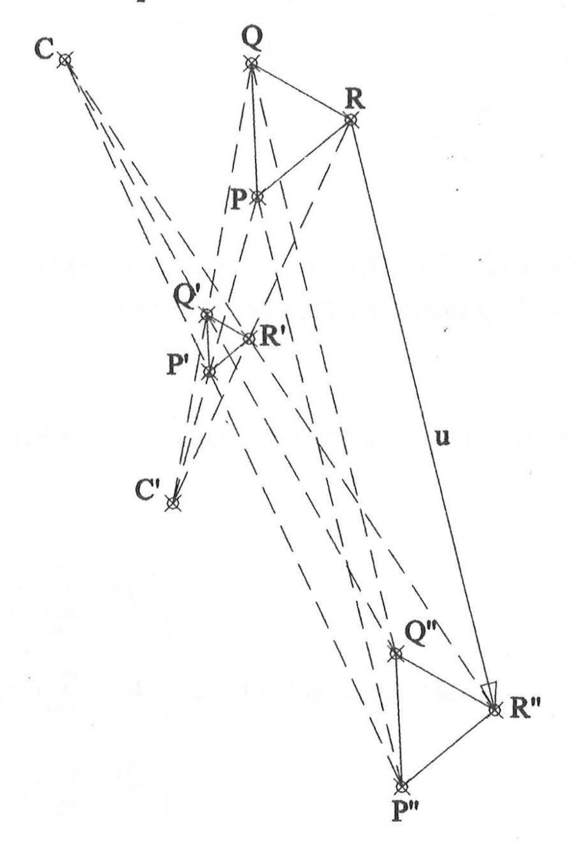
- No es conmutativa, el centro de la homotecia producto varia al componerlas en distinto orden:



- Pero si el producto $kk'=1$, es decir si $k'=\dfrac{1}{k}$, el resultado es una traslación:

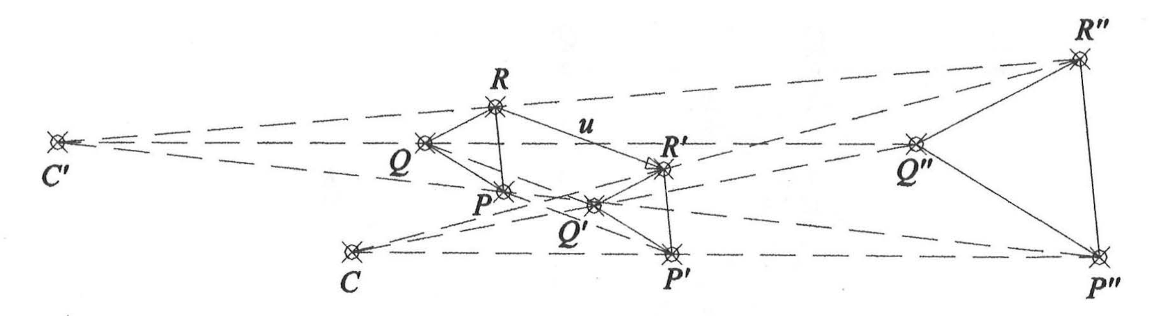


- En este caso tampoco es conmutativa.

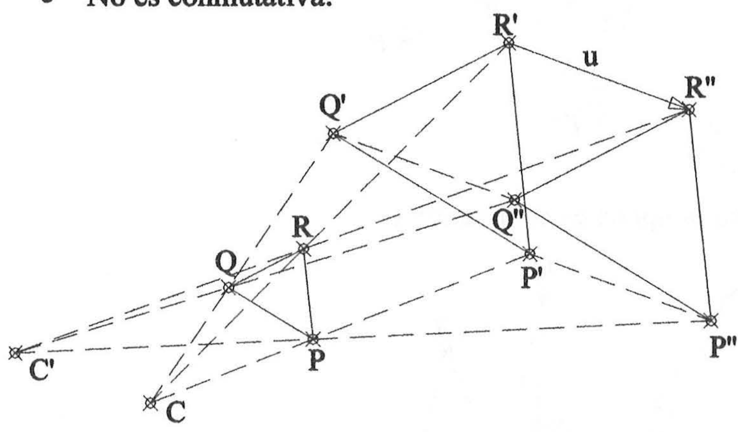


- El conjunto de las homotecias y las traslaciones en un espacio afín es un grupo.
- La composición de una traslación T_u y una homotecia $h_{C,k}$ es otra homotecia si $k \neq 1$ y una traslación si $k = 1$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{por } T_u: & \overline{T_u(P)T_u(Q)} = \overline{PQ} \\ \text{por } h_{C,k}: & \overline{h_{C,k}(T_u(P))h_{C,k}(T_u(Q))} = k\overline{T_u(P)T_u(Q)} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{h_{C,k}(T_u(P))h_{C,k}(T_u(Q))} = k\overline{PQ}$$



- No es conmutativa:



Ecuaciones:

Dado un sistema de referencia $\Re = \{O, e_1, e_2, ...e_n\}$ en el espacio afín, y una homotecia de centro $C \in X$ y razón $k \in \Re$, por definición:

$$\left.\begin{array}{l} \overline{CP'} = k\overline{CP} \\ \text{refiriendo al origen:} \\ \overline{CP'} = \overline{OP'} - \overline{OC} \\ \overline{CP} = \overline{OP} - \overline{OC} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{OP'} - \overline{OC} = k\left(\overline{OP} - \overline{OC}\right) \Leftrightarrow \overline{OP'} = (1-k)\overline{OC} + k\overline{OP}$$

$$\text{si referimos a la base:} \left\{\begin{array}{l} \overline{OP'} = \sum_{i=1}^{n} x'_i\, e_i \\ \overline{OC} = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \\ \overline{OP} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i = (1-k)\sum_{i=1}^{n} c_i e_i + k\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \Leftrightarrow x'_i = (1-k)c_i + kx_i ; \forall i \in \{1,2,3.....n\}$$

Matricialmente:

$$Y = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & . & 0 \\ \hline (1-k)c_1 & k & . & 0 \\ . & . & . & . \\ (1-k)c_n & 0 & . & k \end{array}\right) X$$

AFINIDADES EN EL PLANO

En este apartado, vamos a describir todas las afinidades en el plano afín ordinario, empezaremos definiendo aquellas que mantienen una recta de puntos invariantes, a continuación estudiando la composición de estas y traslaciones obtendremos, en determinados casos, las afinidades que no mantiene ningún punto invariante y por último, analizando todas las formas de componer de afinidades con una recta invariante entre si, llegaremos a describir las que tienen un solo punto invariante.

La expresión matricial de las ecuaciones de una afinidad (f,φ), respecto de una referencia cualquiera son :

$$Y=\left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline P & A \end{array}\right)X$$

que al ser una biyección es una matriz inversible.

Si estamos en el plano con una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2\}$, la matriz A de la aplicación lineal φ asociada es cuadrada de orden dos y la matriz de bloques es de orden tres.

En este apartado además, eligiendo la referencia adecuada, vamos a obtener las ecuaciones reducidas de todas ellas.

Terminaremos dando una clasificación de todas las matrices asociadas a una afinidad en el plano, corresponderá cada una de ellas a una afinidad diferente.

Afinidades que mantienen una recta de puntos invariantes:

Si tienen una recta de puntos invariantes para obtener las ecuaciones reducidas tomamos como referencia, $\Re=\{O,e_1,e_2\}$, siendo O un punto invariante del eje, e_1 un vector con la dirección del eje y e_2 un vector cualquiera no colineal con el anterior.

El vector e_1, al estar sobre el eje se queda invariante mediante la aplicación lineal asociada, es decir: $\varphi(e_1)=e_1$, luego la matriz A tendrá la forma:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Por otra parte, al ser el origen invariante $P=0$ y la matriz de la afinidad resulta:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & d \end{array}\right)$$

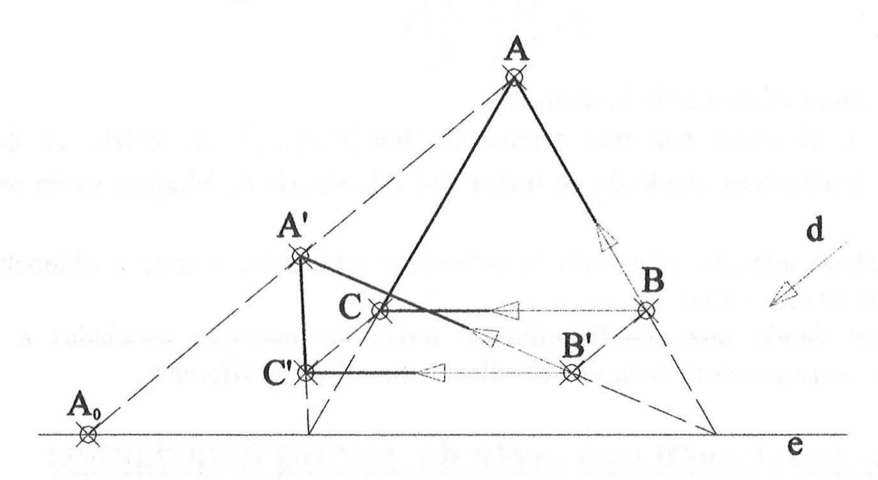
Afinidad homológica:

Definición:

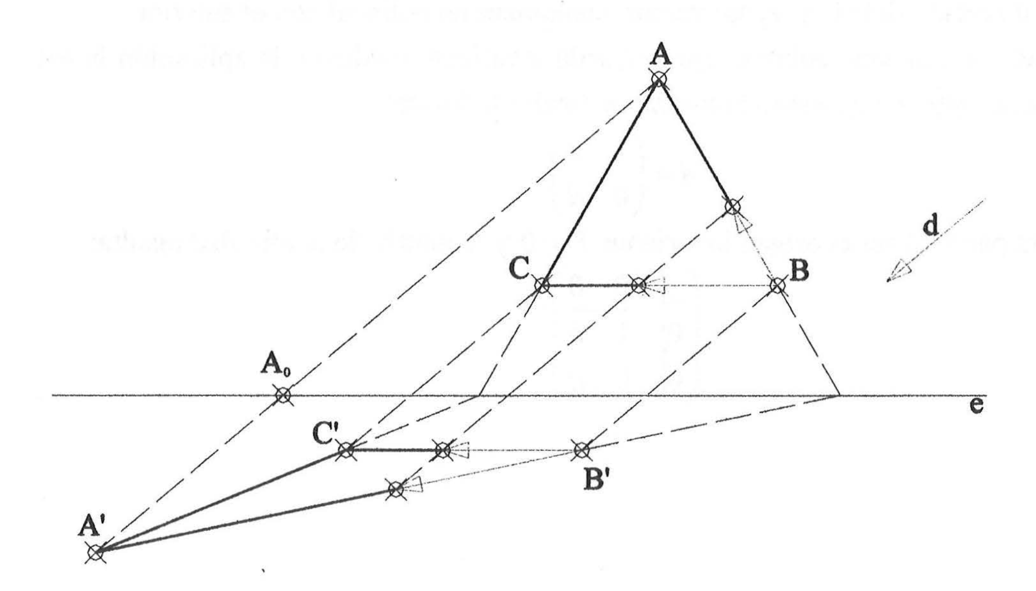
Se llama afinidad homológica de eje e, dirección d y característica α, a una transformación en la que el transformado $f(A)$ de un punto A, está sobre la recta que pasa por A con la dirección de d y cuya característica α es la razón simple $(A_0, A, f(A))$, siendo A_0 el punto de corte del eje e con la recta $\overline{Af(A)}$.

Se representa por $A_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha)$.

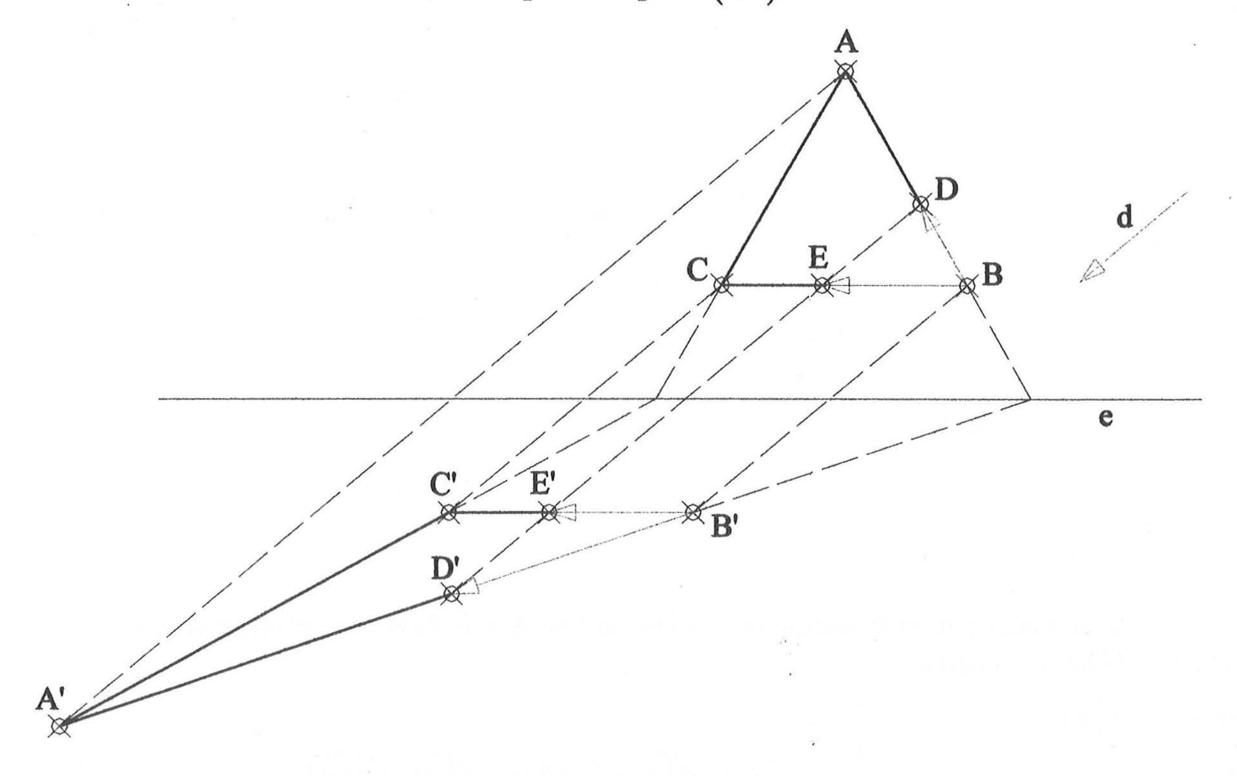
- Si $\alpha > 0$, los puntos y sus transformados están en el mismo semiplano y se llama afinidad homológica acorde.



- Si $\alpha < 0$, los puntos y sus transformados están en diferente semiplano y se llama afinidad homológica discorde.



- Si $\alpha = -1$, se llama **simetría oblicua** de eje e y dirección d.
  Se representa por $S(e, d)$.



De la definición se deduce:

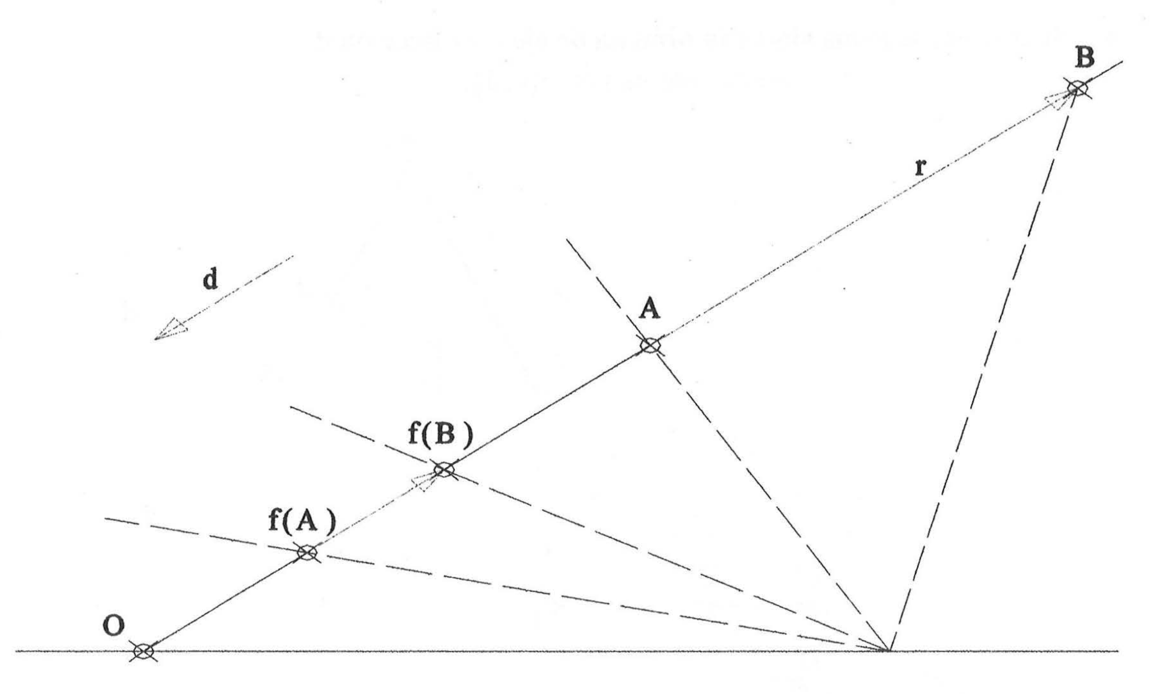
- La única recta doble de puntos dobles es el eje e, es decir solo admite una recta de puntos invariantes.

- Las rectas paralelas a d son dobles pero no de puntos dobles, luego d es una dirección invariante.

- Tiene dos direcciones invariantes, una la del eje e que corresponde a un autovalor $\lambda_1 = 1$ y otra dirección d con autovalor $\lambda_2 \neq 1$.

Propiedades:

1.- El autovalor λ_2, que corresponde a la dirección de d coincide con la característica α.



Sea la recta r con la dirección de d y los puntos A y B cuyos transformados son $f(A)$ y $f(B)$, se verifica:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\overline{OA}=\overline{Of(A)}\\ \text{y}\\ \alpha\overline{OB}=\overline{Of(B)}\\ \text{Por otra parte}:\overline{BA}=\overline{OA}-\overline{OB}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\alpha\overline{BA}=\overline{Of(A)}-\overline{Of(B)}=\overline{Of(A)}-\overline{Of(B)}\\ \text{como}:\overline{Of(A)}-\overline{Of(B)}=\overline{f(B)f(A)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\overline{BA}=\overline{f(A)f(B)}.$$

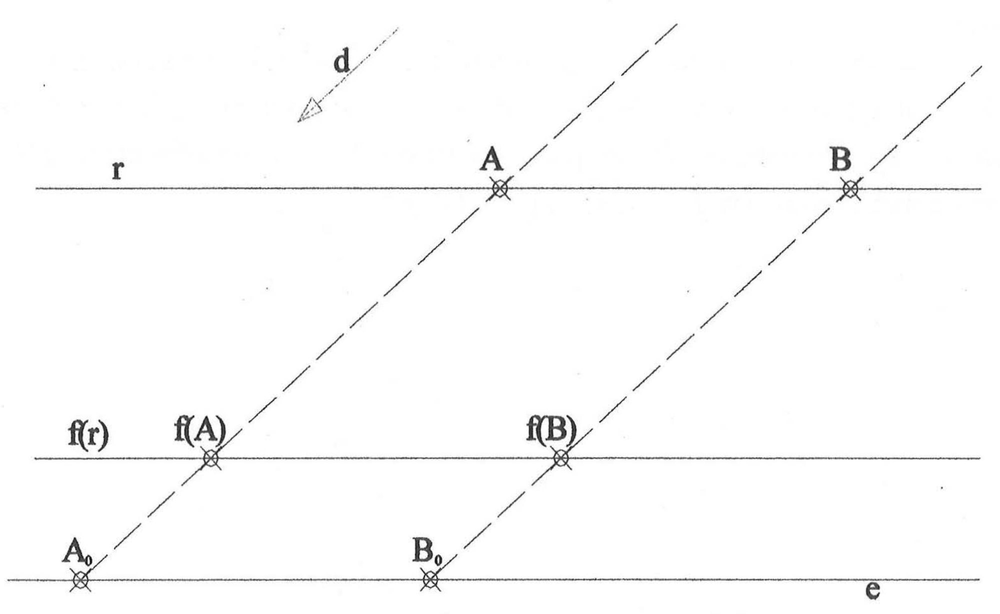
y por tanto $\lambda_2=\alpha$.

2.- Las rectas paralelas al eje se transforman en rectas paralelas al eje.
Sea la recta r paralela al eje e y dos puntos A,B de la misma, sus transformados mediante la afinidad homológica $A_h(\text{e},\text{d},\alpha)$, serán los puntos $f(A)$ y $f(B)$ tales que:

$$\left.\begin{array}{l}(A_0,f(A),A)=\alpha\\ (B_0,f(B),B)=\alpha\end{array}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}\overline{A_0f(A)}=\alpha\overline{A_0A}\\ \overline{B_0f(B)}=\alpha\overline{B_0B}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \overline{AB}\text{ es paralelo a }\overline{f(A)f(B)}\text{ al estar}$$

$A_0,A,f(A)$ y $B_0,B,f(B)$ sobre dos rectas con la dirección d de la afinidad.

Además al ser $ABf(A)f(B)$ un paralelogramo $\overline{AB}=\overline{f(A)f(B)}$ y la dirección de e es invariante con autovalor $\lambda=1$.

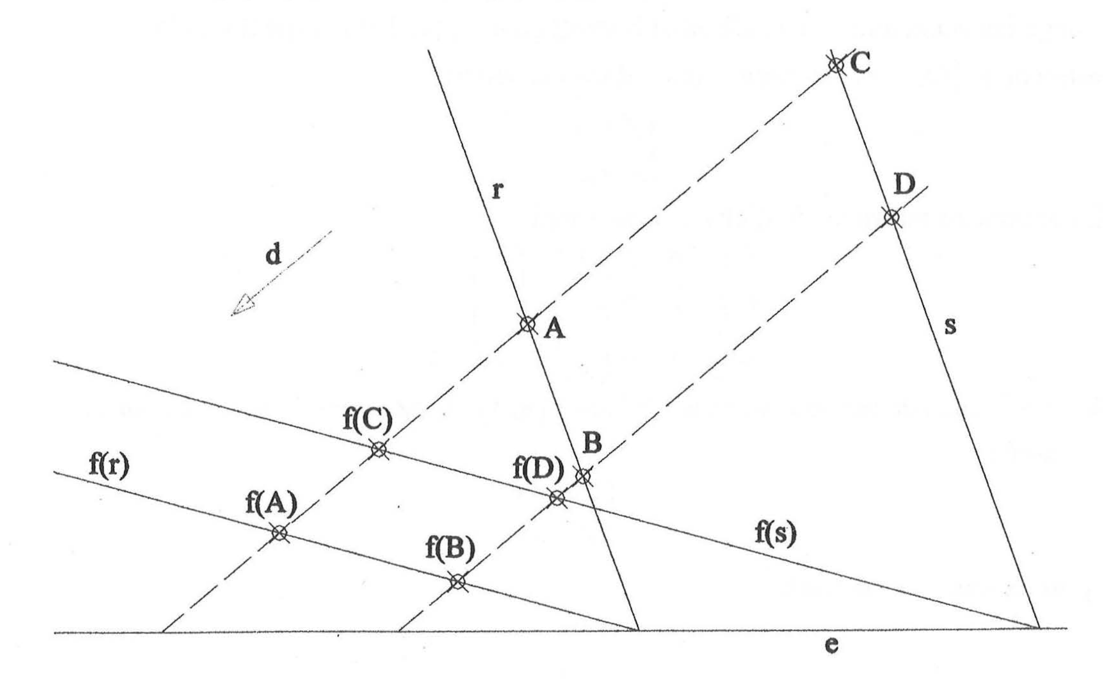


3.- Las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas.
Sean las rectas r y s paralelas y los puntos $A, B \in$ r y $C, D \in$ s.

$$\left.\begin{array}{l}\text{por 1.- se verifica:}\left\{\begin{array}{l}\alpha\overline{CA}=\overline{f(C)f(A)}\Rightarrow\overline{CA}=\dfrac{1}{\alpha}\overline{f(C)f(A)}\\ \text{y}\\ \alpha\overline{DB}=\overline{f(D)f(B)}\Rightarrow\overline{DB}=\dfrac{1}{\alpha}\overline{f(D)f(B)}\end{array}\right.\\ \text{como } ABCD \text{ es un paralelogramo}: \overline{CA}=\overline{DB}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{\alpha}\overline{f(C)f(A)}=\frac{1}{\alpha}\overline{f(D)f(B)}\Rightarrow$$

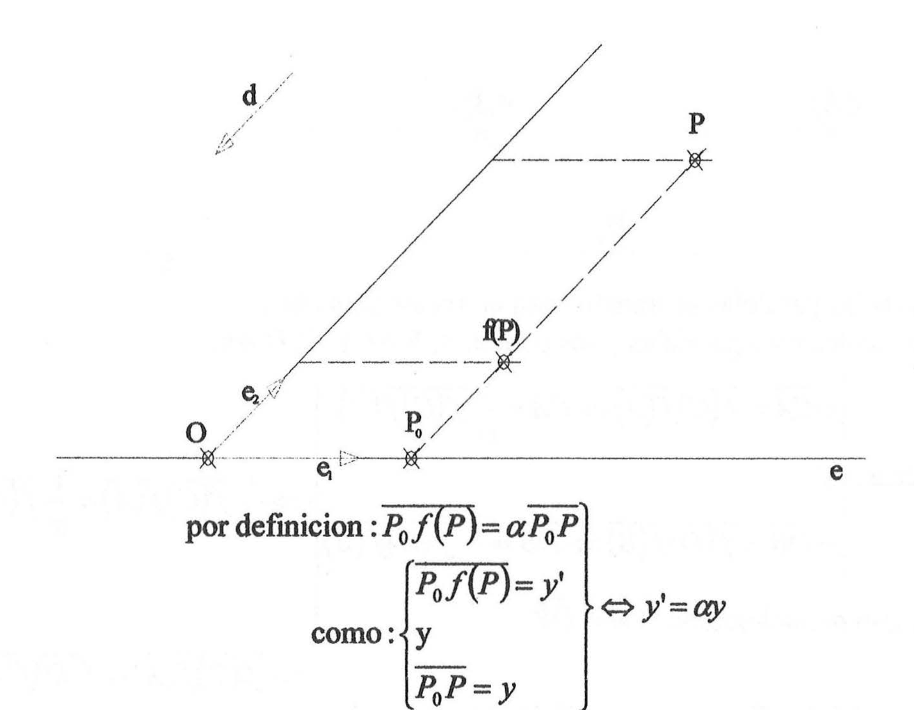
$$\Rightarrow \overline{f(C)f(A)}=\overline{f(D)f(B)}$$

y al ser $\overline{f(C)f(A)}$ paralelo a $\overline{f(D)f(B)}$, se verifica que r' es paralela a s'.



Ecuaciones:

Si tomamos como sistema de referencia $\{O, e_1, e_2\}$, formado por e_1 dirección del eje e de la afinidad, $e_2 = \mathrm{d}$ y O un punto cualquiera del eje, llamamos a las coordenadas de un punto genérico P y su transformado $f(P)$ respecto de dicha referencia $P = (x, y)$ y $f(P) = (x', y')$:



$$\text{por definicion}: \overline{P_0 f(P)} = \alpha \overline{P_0 P}$$

$$\text{como}: \left\{ \begin{array}{l} \overline{P_0 f(P)} = y' \\ \text{y} \\ \overline{P_0 P} = y \end{array} \right\} \Leftrightarrow y' = \alpha y$$

$$\text{Ademas se verifica}: x' = x$$

Luego las ecuaciones de la afinidad homológica $A_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha)$ respecto de la referencia $\{O, e_1, e_2\}$, anteriormente definida serán:

$$\begin{cases} y' = \alpha y \\ x' = x \end{cases}$$

La expresión matricial de dicha afinidad será:

$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{array} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

- En el caso de ser una simetría oblicua $S(\mathrm{e}, \mathrm{d})$, como $\alpha = -1$, sus ecuaciones serán:

$$\begin{cases} y' = -y \\ x' = x \end{cases}$$

y su expresión matricial:

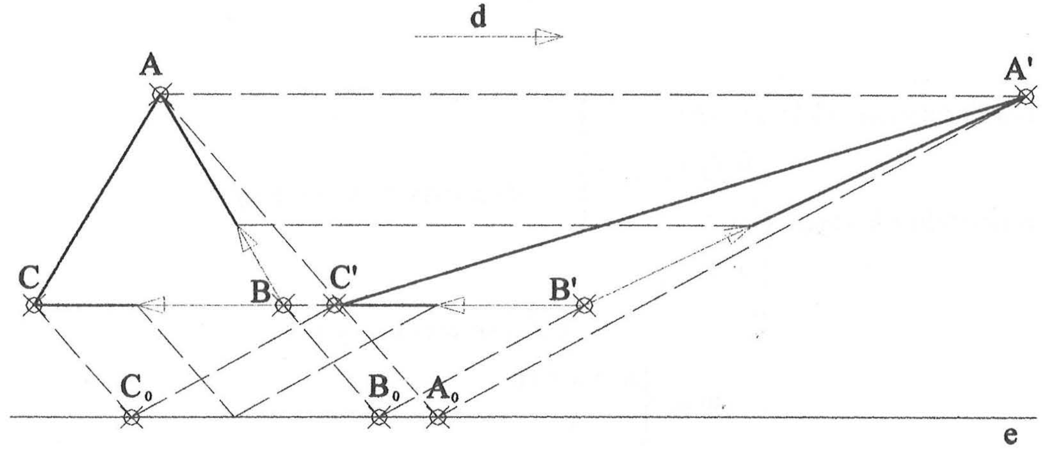
$$\left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Afinidad homológica especial.

Definición:

Se llama afinidad homológica especial a toda afinidad homológica en que la dirección d es paralela al eje e de la misma.

Tomada una dirección cualquiera no paralela al eje la relación $\overline{A_0 f(A)} = \alpha \overline{A_0 A}$, se mantiene constante.



Se representa por $A_{he}(\mathrm{e},\alpha)$.

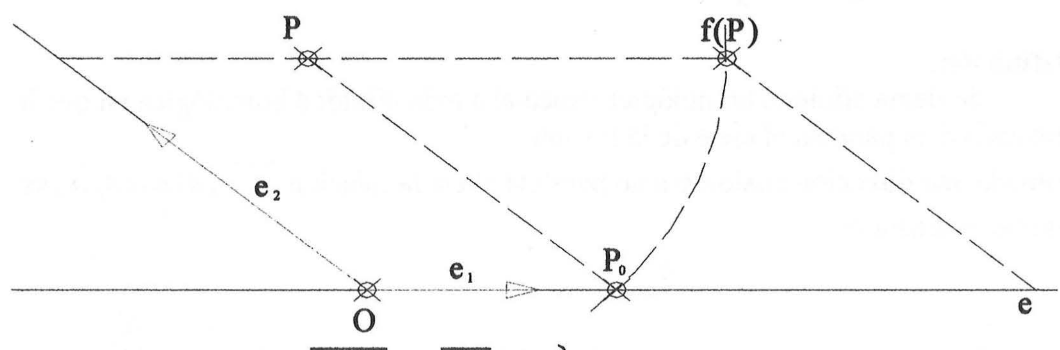
De la definición se deduce:

- Tiene una recta doble de puntos dobles que es el eje, en consecuencia su dirección es invariante y corresponde a un autovalor $\lambda_1 = 1$.
- Las únicas rectas dobles son paralelas al eje y no son de puntos dobles. Por tanto solo tiene una dirección invariante que corresponde a un único autovalor doble, $\lambda_1 = 1$.

Ecuaciones:

Si tomamos como sistema de referencia $\{O, e_1, e_2\}$ compuesto por e_1, dirección del eje e de la afinidad, e_2 una dirección cualquiera no paralela al eje y O un punto arbitrario del mismo y llamamos a las coordenadas de un punto genérico P

y su transformado $f(P)$ respecto de dicha referencia $P=(x,y)$ y $f(P)=(x',y')$:



$$\left.\begin{array}{l}\text{por definicion}: \overline{Pf(P)}=\alpha\overline{PP_0} \\ \text{refiriendo a los ejes}: \begin{cases}\overline{Pf(P)}=x'-x \\ y \\ \overline{PP_0}=y\end{cases}\end{array}\right\} \Leftrightarrow x'-x=\alpha y \Rightarrow x'=x+\alpha y$$

Ademas se verifica : $y'=y$

$$\text{Resulta: } \begin{cases} x'=x+\alpha y \\ y'=y \end{cases}$$

Siempre se podrá encontrar una dirección para el vector e_2 tal que se verifique: $\overline{Pf(P)}=\overline{PP_0}$ y entonces las ecuaciones de la afinidad homológica especial $A_{he}(\text{e},\alpha)$ respecto de la referencia $\{O,e_1,e_2\}$, anteriormente definida, serán:

$$\begin{cases} x'=x+y \\ y'=y \end{cases}$$

y su expresión matricial de dicha afinidad será:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Afinidades sin puntos invariantes:

Sabemos que la **traslación** es una afinidad y que no mantiene ningún punto invariante, conocemos su comportamiento y sus ecuaciones, que respecto de una referencia $\Re = \{O, e_1, e_2\}$ en la que $e_1 = u$, el vector de la traslación, tienen como matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La aplicación lineal asociada a una traslación es la identidad, por ello, si componemos una traslación y una afinidad que mantiene un eje invariante (afinidad homológica o afinidad homológica especial), la aplicación lineal asociada a la afinidad resultante de la composición no varia.

Pero dependiendo de la posición relativa entre el vector de la traslación y el eje de la afinidad obtendremos resultados diferentes, afinidades con un eje invariante del mismo tipo que la afinidad factor o un nuevo tipo de afinidades sin puntos invariantes distintas de la traslación, que llamaremos **trasloafinidades**.

Para obtener las ecuaciones reducidas de las trasloafinidades vamos a tomar una referencia $\Re = \{O, e_1, e_2\}$, siendo, (como en el caso anterior afinidades que mantienen una recta de puntos invariantes), O un punto cualquiera del eje de la afinidad factor, e_1 un vector con la dirección del eje de dicha afinidad y e_2 el vector de la traslación, en estas condiciones la matriz A tendrá la misma forma que en las afinidades homológicas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Es lógico, puesto que las trasloafinidades tienen la misma aplicación lineal asociada que las afinidades con una recta de puntos fijos.

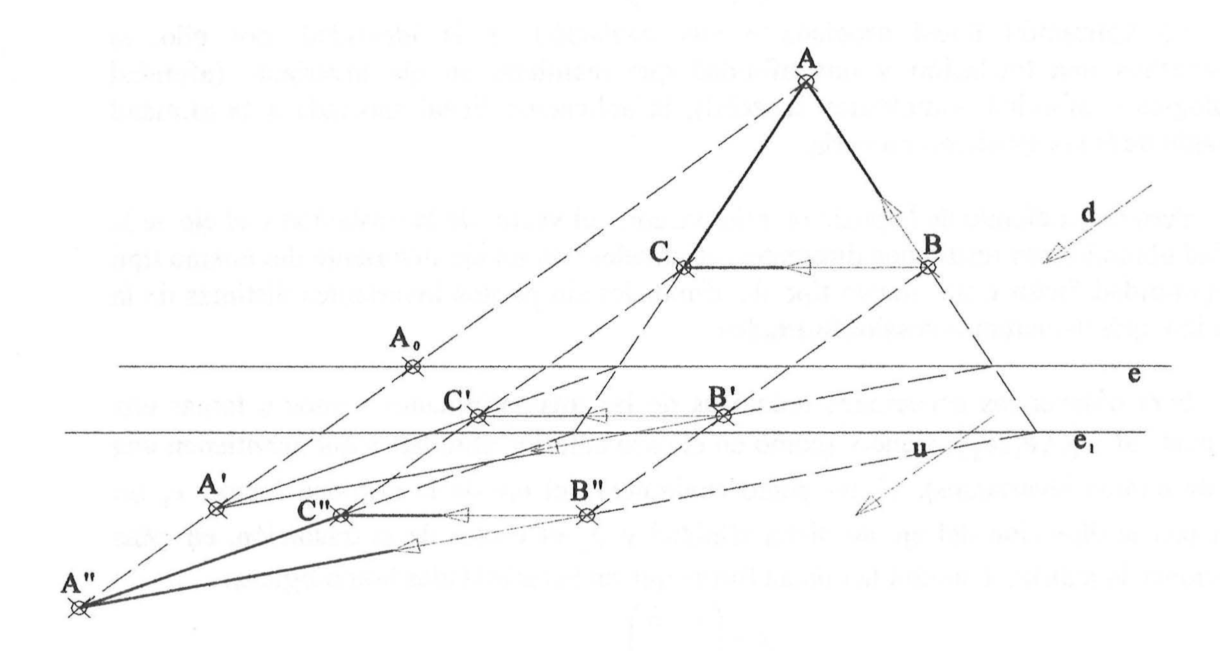
Al no haber puntos fijos, el origen no es invariante y por tanto $P \neq 0$ y la matriz de la trasloafinidad resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Composición de afinidad homológica y traslación, trasloafinidades.

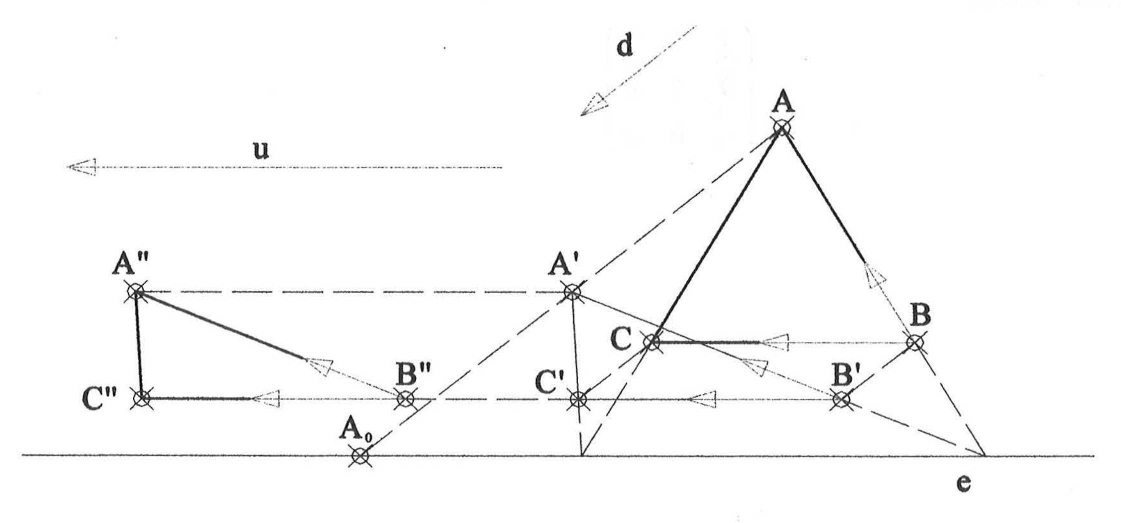
1.- La composición de una afinidad homológica $A_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha)$ y una traslación de vector u paralelo a la dirección de la afinidad t_u, es otra afinidad homológica de eje e_1, paralelo a e, igual dirección y característica α', $A'_h(\mathrm{e}_1, \mathrm{d}, \alpha')$, siendo $\alpha' = (A_0, A, t_u \circ A_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha))$.

2.- Trasloafinidad.



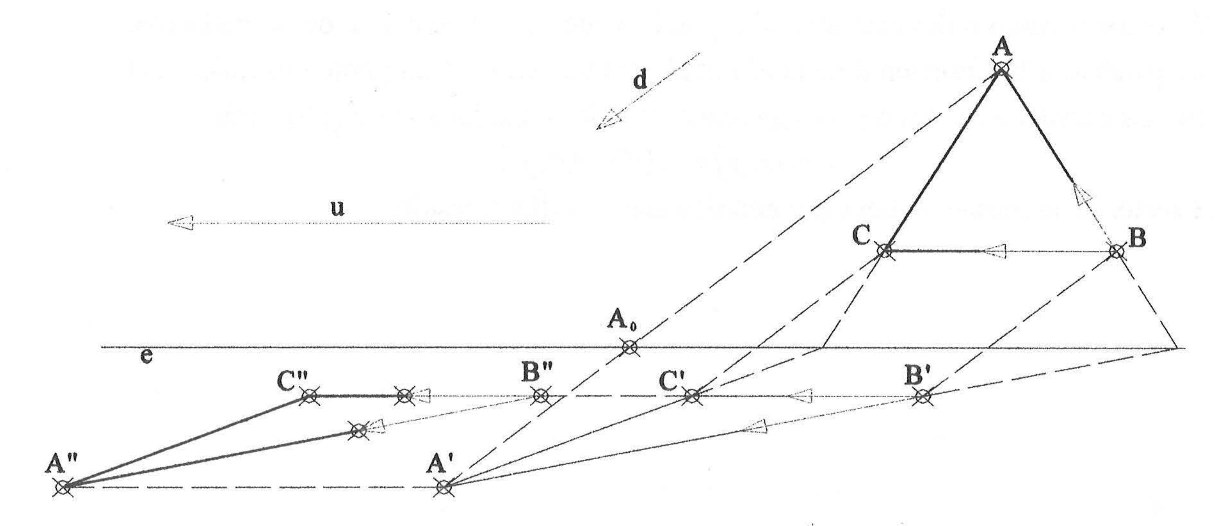
Definición::

Se llama trasloafinidad a la composición de una afinidad homológica $A_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha)$ con una traslación t_u de vector u paralelo al eje de la afinidad e. Se representa por $T_A(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha)$.



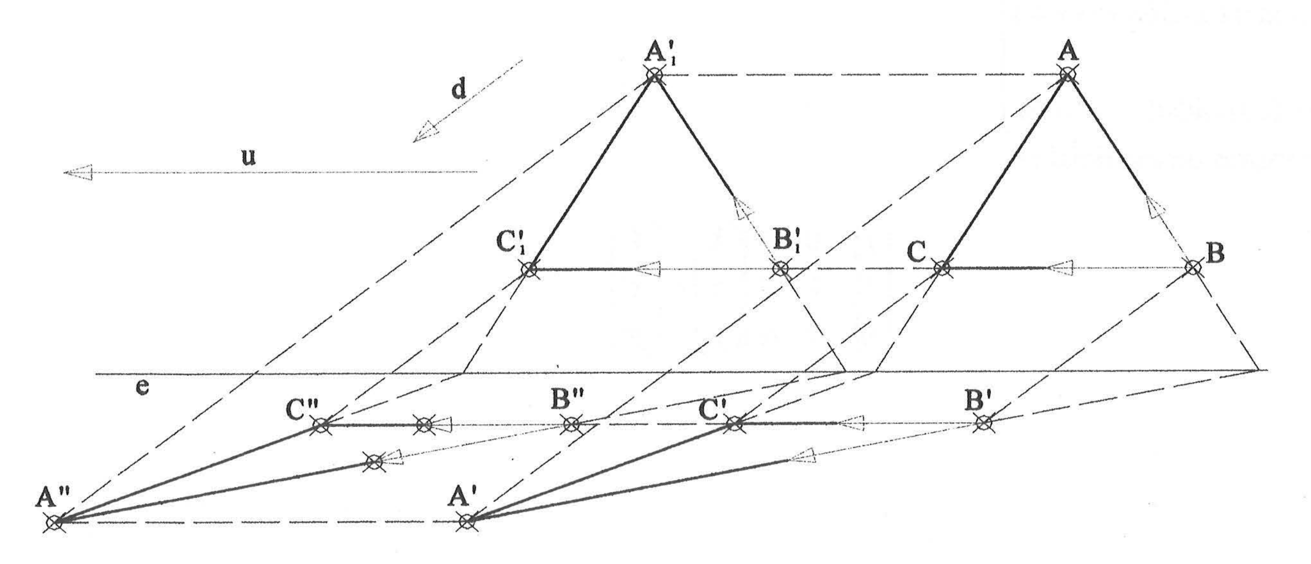
- Si $\alpha > 0$ los puntos y sus trasformados están en el mismo semiplano y se llama trasloafinidad acorde.
- Si $\alpha < 0$ los puntos y sus trasformados están en distinto semiplano y se llama trasloafinidad discorde.

De la definición se deduce, dado que las traslaciones mantienen todas las direcciones



invariantes y ningún punto doble, que:

- No tiene puntos invariantes.
- Tiene una recta doble pero no de puntos dobles, que es el eje de la afinidad homológica.
- Las rectas paralelas al eje se transforman en rectas paralelas al eje, por ello la dirección del mismo es invariante y corresponde a un autovalor $\lambda_1 = 1$.
- Las rectas paralelas a la dirección d de la afinidad, se transforman en rectas paralelas a sí mismas, por tanto d es una dirección invariante con autovalor $\lambda_2 = \alpha$.
- Las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas.
- La composición es conmutativa.



Llamando a $t_u(A)=A_1'$, $f(A)=A'$ y $t_u(f(A))=A''$, al ser $AA_1'A'A''$ un paralelogramo se verifica:

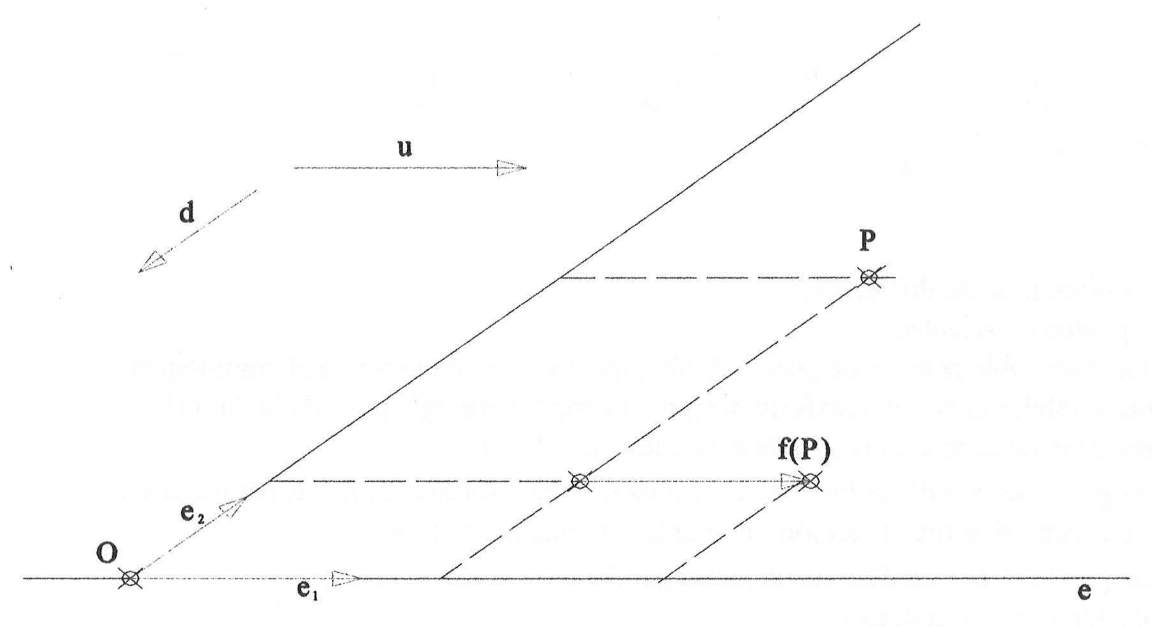
$$A_h(\mathrm{e},\mathrm{d},\alpha)\circ t_u = t_u \circ A_h(\mathrm{e},\mathrm{d},\alpha).$$

Ecuaciones:

Si se toma como referencia afín $\{O,e_1,e_2\}$, siendo e_1 el vector u de la traslación, e_2 paralelo a la dirección d de la afinidad homológica y O un punto cualquiera del eje, las coordenadas de un punto genérico P y de su trasformado $T_A(P)$ serán:

$$P=(x,y) \text{ y } T_A(P)=(x',y')$$

Como el vector de la traslación tiene por coordenadas: $u=(1,0)$, resulta:

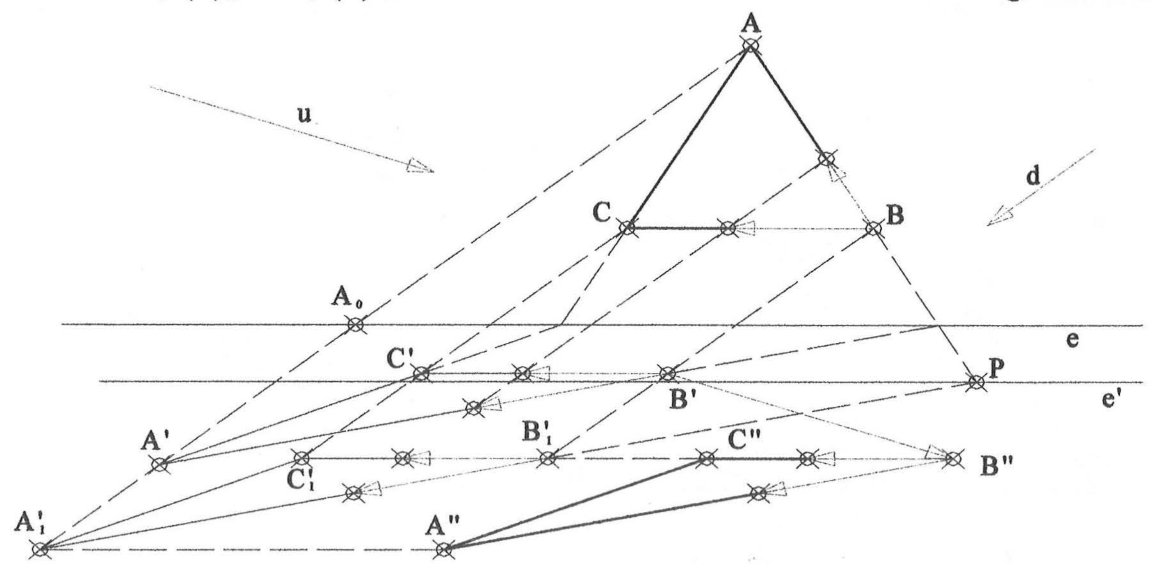


$$\left.\begin{array}{l}\text{por la traslación } x'=x+1\\ y\\ \text{por la afinidad } \quad y'=\alpha y\end{array}\right\}$$

La expresión matricial es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$$

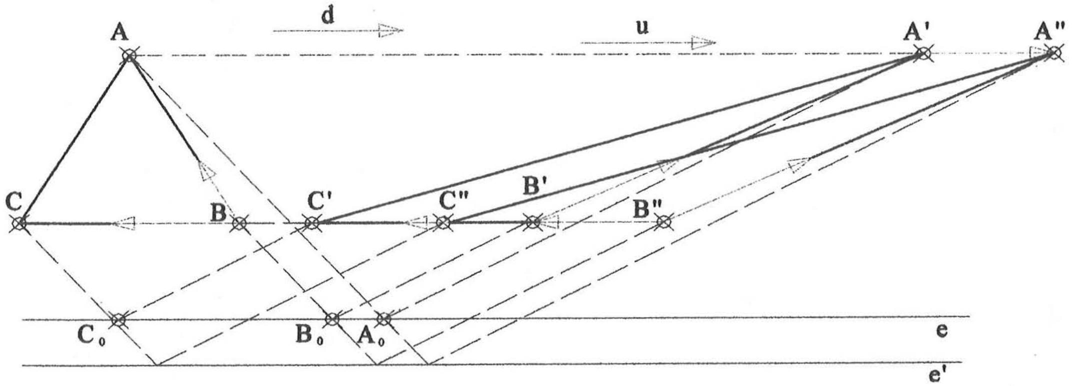
3.- La composición de una afinidad homológica $A_h(\text{e}, \text{d}, \alpha)$ con una traslación t_u de vector u no paralelo al eje de la afinidad, es un trasloafinidad de eje e', paralelo al eje e de la afinidad homológica, de la misma dirección d y distinta característica α', $T_A(\text{e}', \text{d}, \alpha')$. Sean $A' = f(A)$ y $B' = f(B)$, los transformados mediante la afinidad homológica de los



puntos A y B, $A'' = t_u \circ f(A)$ y $B'' = t_u \circ f(B)$, los transformados de A y B mediante la composición, si se trazan las paralelas al eje por A'' y B'' obtendremos los puntos A_1' y B_1' de intersección entre dichas paralelas y las rectas AA' y BB', prolongando la recta $A_1'B_1'$ hasta cortar a la recta AB encontramos el punto P que pertenece al eje de la trasloafinidad.

COMPOSICIÓN DE AFINIDAD HOMOLOGICA ESPECIAL Y TRASLACIÓN, TRASLOAFINIDAD ESPECIAL:

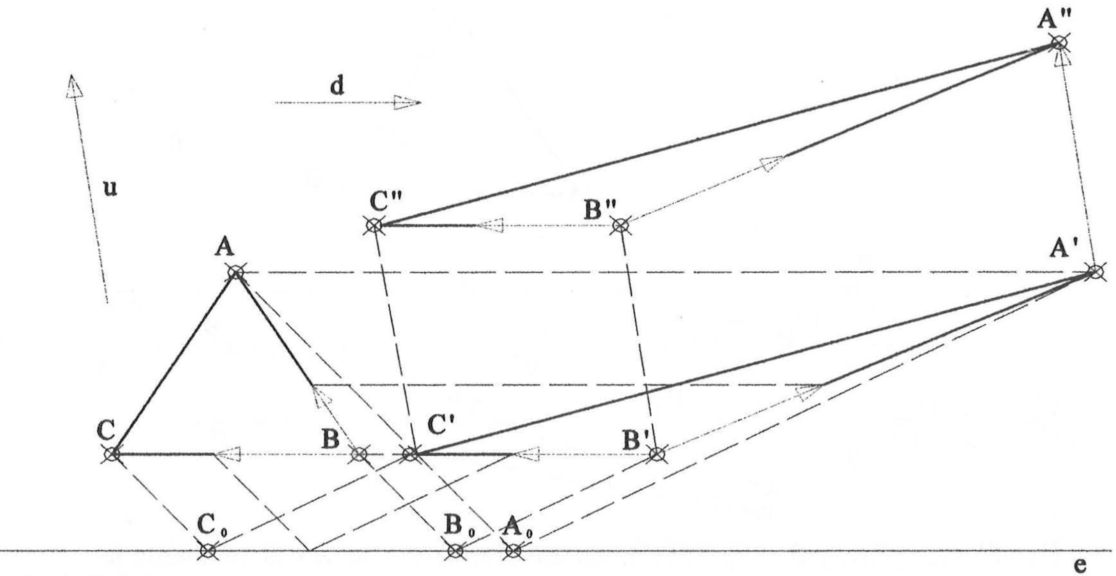
1.- La composición de una afinidad homólogica especial $A_{he}(\text{e}, \alpha)$ y una traslación de vector u paralelo a la dirección de la afinidad t_u, es otra afinidad homlógica especial de eje e' paralelo a e, $A'_{he}(\text{e}', \alpha)$.



- La composición es conmutativa.

2.- TRASLOAFINIDAD ESPECIAL:

La composición de una afinidad homológica especial $A_{he}(\mathrm{e},\alpha)$ y una traslación t_u de vector u no paralelo a la dirección de la afinidad se llama trasloafinidad especial, la representamos por T_{AE}.



De la definición se deduce:

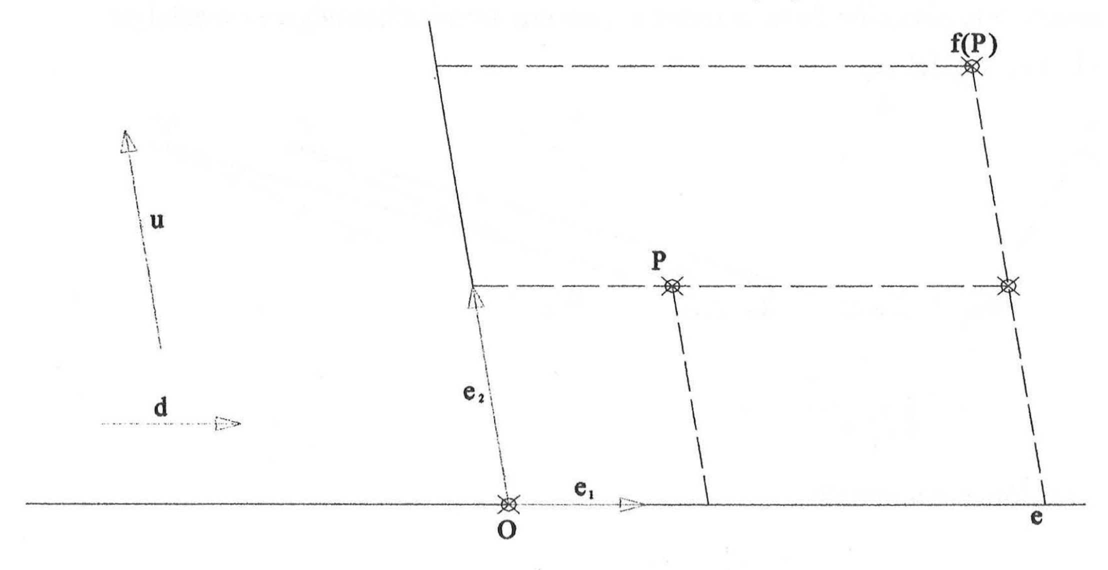
- No tiene puntos dobles.
- Las rectas paralelas al eje de la afinidad son dobles pero no de puntos dobles, por tanto dicha dirección es invariante y corresponde a un autovalor $\lambda = 1$.

Ecuaciones:

Si tomamos una referencia afín $\{O, e_1, e_2\}$, siendo e_1 con la dirección del eje e de la afinidad homológica especial, e_2 es el vector de la traslación y O un punto cualquiera del eje, las coordenadas de un punto genérico P y de su trasformado $T_{AE}(P) = P'$ serán:

$$P = (x, y) \text{ y } P' = (x', y').$$

Como las coordenadas del vector de la traslación son: $u = (0,1)$, resulta:



$$\left.\begin{array}{ll}\text{por la traslación :} & y' = y + 1 \\ \text{por la afinidad homologica especial :} & x' = x + \alpha y\end{array}\right\}$$

Al no ser la dirección de e_2 tal que $\overline{Pf(P)} = \overline{PP_0}$

Que son las ecuaciones de la trasloafinidad especial respecto del sistema de referencia anterior.

La expresión matricial será:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Composición de afinidades homológicas. Afinidades centrales:

Al componer dos afinidades homológicas obtendremos otra afinidad que puede ser de uno de los tipos ya estudiados: afinidad homológica, traslación, trasloafinidad o un nuevo tipo que mantienen un único punto invariante, las **afinidades centrales**.

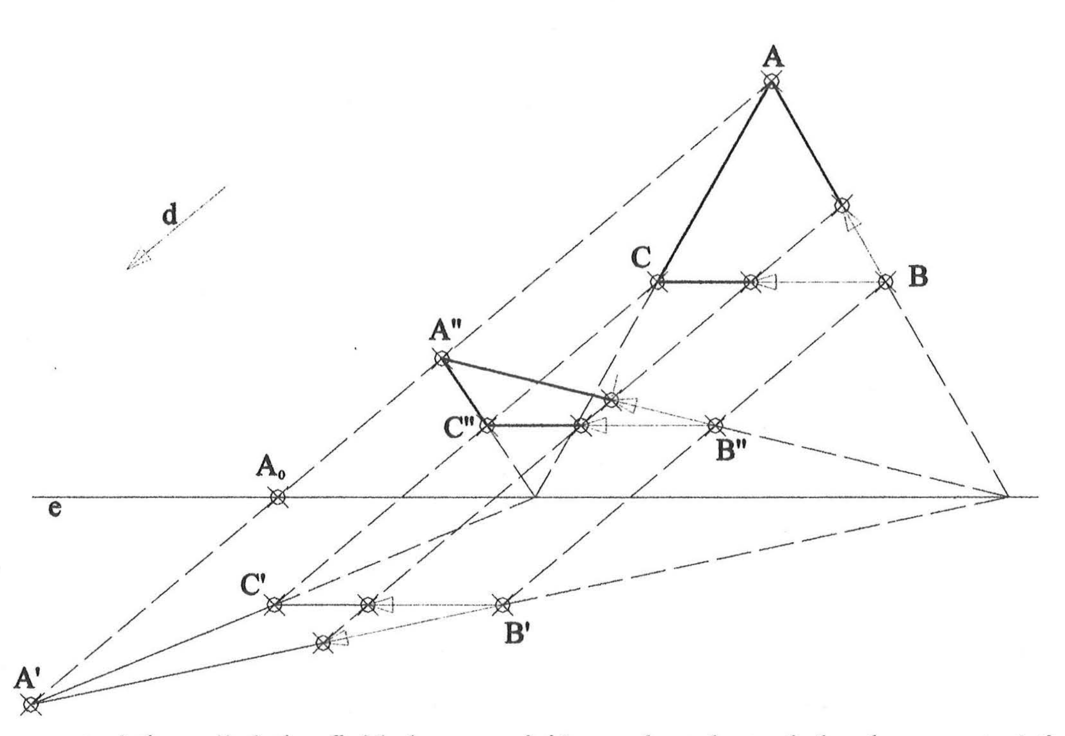
Dependiendo de la posición relativa entre los ejes de ambas afinidades, paralelos o incidentes en un punto; de las direcciones coincidentes o no y de si es paralela la dirección de una de ellas con el eje de la otra el resultado será diferente.

En la referencia $\Re = \{O, e_1, e_2\}$, que utilizaremos para obtener las ecuaciones reducidas tomaremos como origen el punto fijo de la afinidad, como O es invariante la matriz será de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$$

las direcciones de los ejes e_1 y e_2 de la referencia serán las de las direcciones de las afinidades factor.

1.- La **composición de dos afinidades homolólogicas coaxiales e igual dirección** $A_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha)$ y $A'_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha')$, es otra afinidad homológica de la misma dirección y coaxial con las anteriores, $A''_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha'')$.



- La característica α'' de la afinidad composición es el producto de las dos características

Por definición de característica:

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=(A_0,A',A)\Rightarrow \overline{A_0A'}=\alpha\overline{A_0A}\\ \text{y}\\ \alpha'=(A_0,A'',A')\Rightarrow \overline{A_0A''}=\alpha\overline{A_0A'}\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{A_0A''}=\alpha'\alpha\overline{A_0A}\Leftrightarrow \alpha'\alpha=(A_0,A'',A)$$

Luego $\alpha''=\alpha\alpha'$.

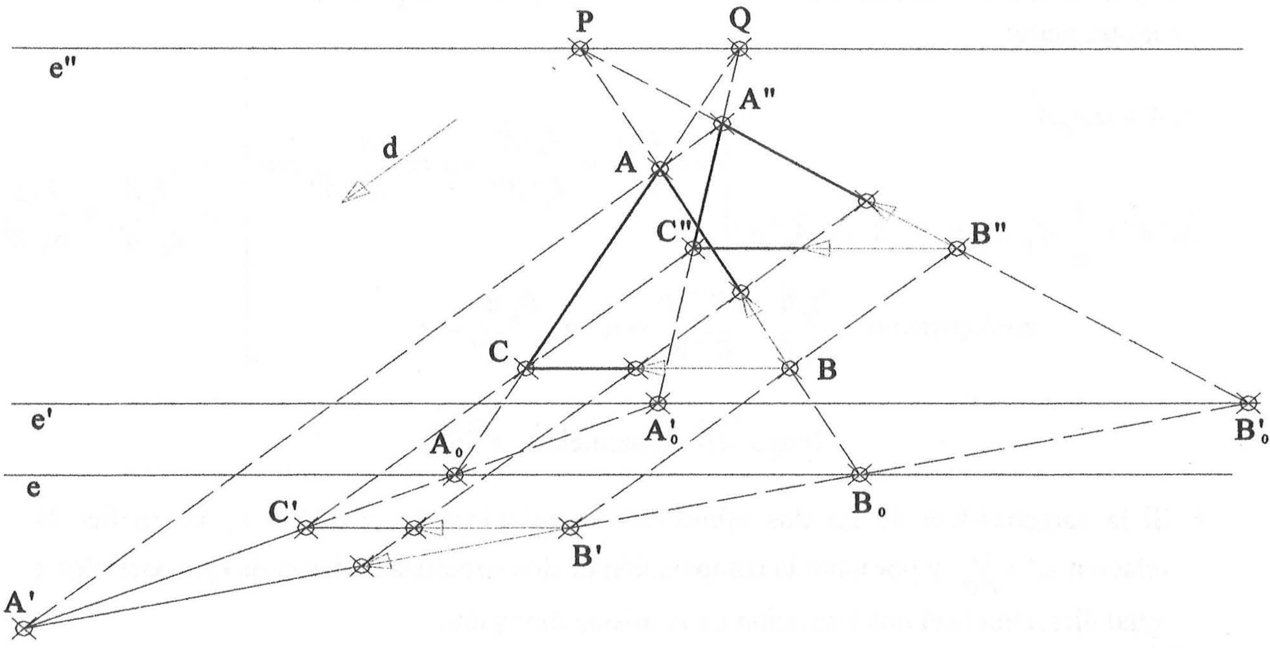
- Si ambas afinidades homologicas son acordes o discordes la composición es acorde y es discorde si una es acorde y la otra es discorde.
- La composición es conmutativa.
- Si $\alpha'=\dfrac{1}{\alpha}$, entonces $\alpha''=1$ y se verifica:

$\overline{A_0A}=\overline{A_0A''}\Rightarrow A\equiv A''$ y el producto es la identidad.

Por tanto la inversa de una afinidad homológica de eje e, dirección d y característica α, $A_h(\text{e},\text{d},\alpha)$, es otra afinidad homológica coaxial con la primera, de igual dirección y característica $\dfrac{1}{\alpha}$, $A'_h\left(\text{e},\text{d},{}^{1}\!/_{\alpha}\right)$.

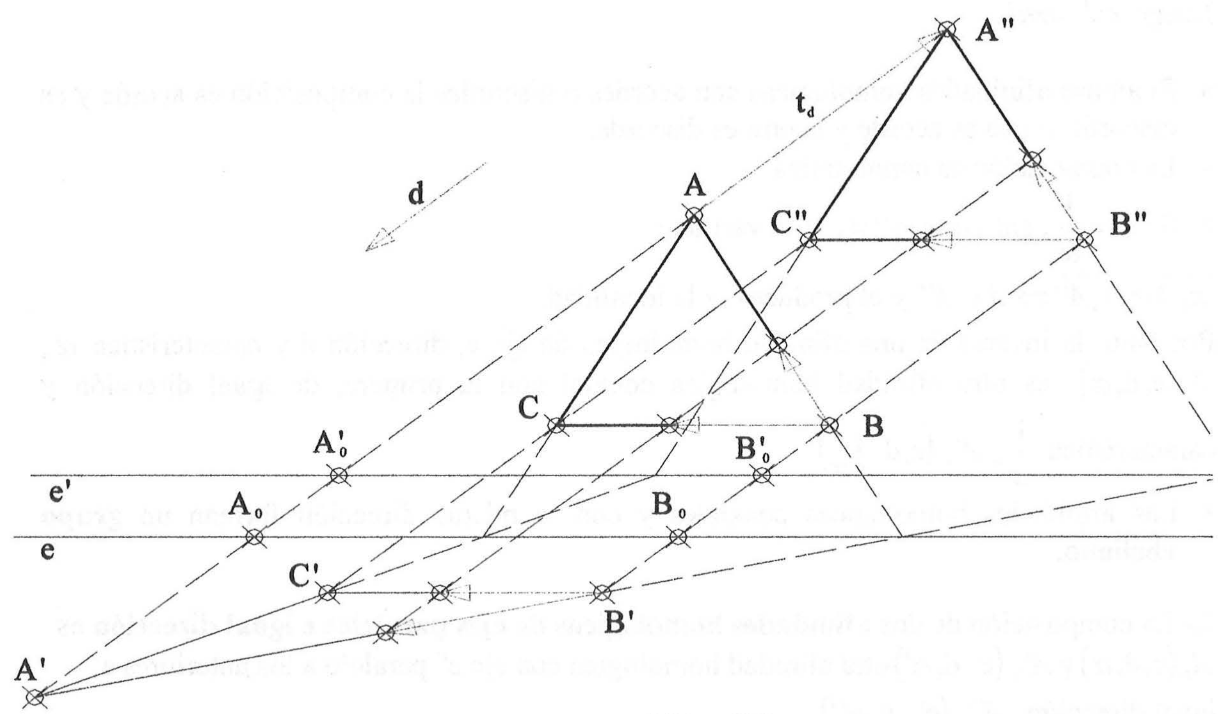
- Las afinidades homológicas coaxiales y con la misma dirección forman un **grupo abeliano.**

2.- La composición de dos **afinidades homológicas de ejes paralelos e igual dirección** es $A_h(\text{e},\text{d},\alpha)$ y $A'_h(\text{e}',\text{d},\alpha')$ otra afinidad homológica con eje e'' paralelo a los anteriores e igual dirección, $A''_h(\text{e}'',\text{d},\alpha'')$.



Sean los puntos A, B y C y sus transformados los puntos A', B' y C', sean $A''=A'_h\circ A_h(A)$, $B''=A'_h\circ A_h(B)$ y $C''=A'_h\circ A_h(C)$; los puntos P y Q de intersección de los pares de rectas $\overline{AB}, \overline{A''B''}$ y $\overline{AC}, \overline{A''C''}$ respectivamente son dobles y por tanto la recta e'' que pasa por los puntos P y Q es el eje de la afinidad producto.

- **Si las características son tales que $\alpha'=\dfrac{1}{\alpha}$, la composición es una traslación** según la dirección de d, t_d:



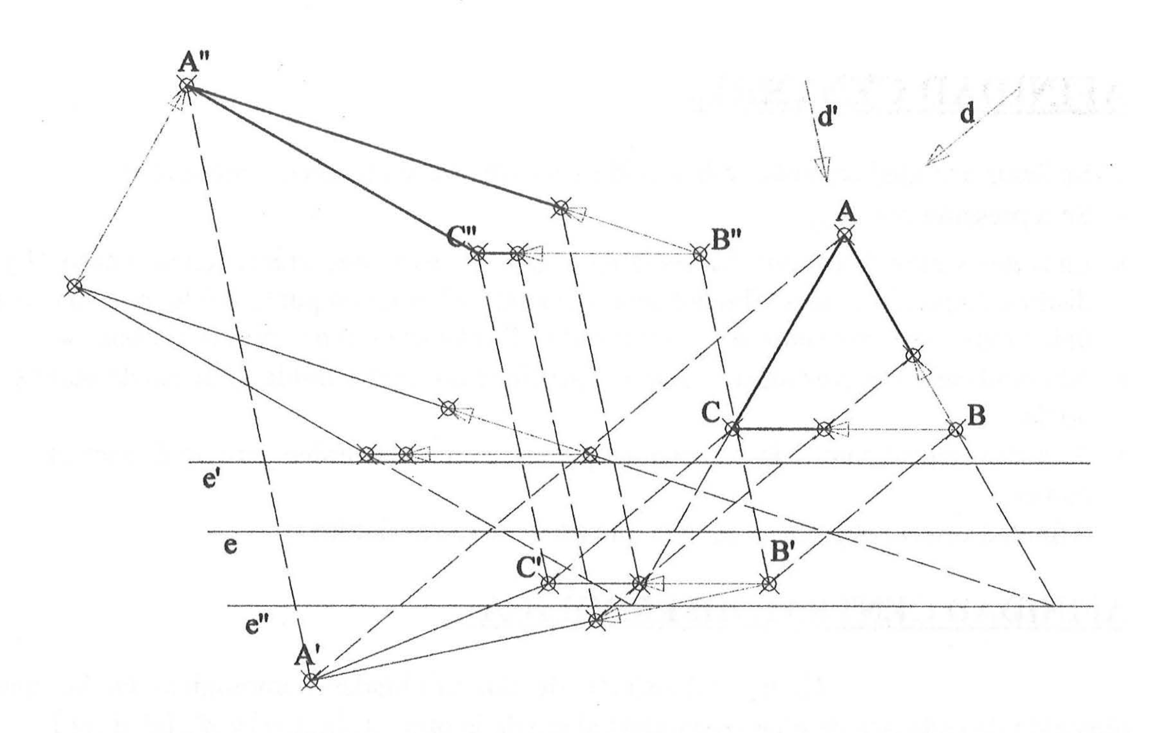
al tener ambas afinidades la misma dirección, $\overline{AA'}$ y $\overline{BB'}$ son paralelas
por otra parte:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \overline{A_0A'}=\alpha\overline{A_0A} \\ \text{y} \\ \overline{A_0'A''}=\dfrac{1}{\alpha}\overline{A'_0A'}\Rightarrow\overline{A'_0A'}=\alpha\overline{A_0'A''} \end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_0A'}}{\overline{A_0A}}=\dfrac{\overline{A_0'A'}}{\overline{A_0'A''}}=\alpha\Rightarrow\dfrac{\overline{A_0A}}{\overline{A_0'A''}}=\alpha \\ \text{analogamente}: \dfrac{\overline{B_0B'}}{\overline{B_0B}}=\dfrac{\overline{B_0'B'}}{\overline{B_0'B''}}=\alpha\Rightarrow\dfrac{\overline{B_0B}}{\overline{B_0'B''}}=\alpha \end{array}\right\}\Rightarrow\dfrac{\overline{A_0A}}{\overline{A_0'A''}}=\dfrac{\overline{B_0B}}{\overline{B_0'B''}}$$

luego $\overline{AB}$ es paralelo a $\overline{A''B''}$.

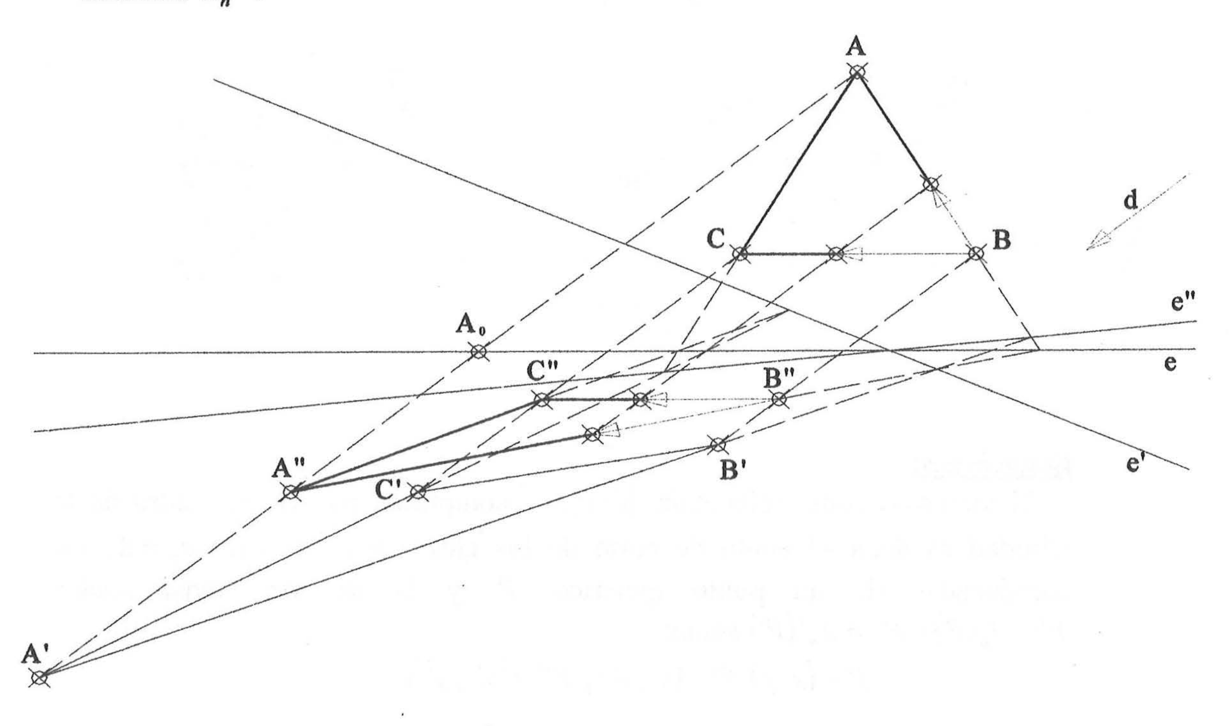
- Si la característica de las dos afinidades homológicas es $\alpha=\alpha'=-1$, se verifica la relación $\alpha'=1/\alpha$ y por tanto la composición de dos simetrías oblicuas de ejes paralelos e igual dirección será una traslación en la misma dirección.

3.- La composición de **dos afinidades homológicas de ejes paralelos y distinta dirección,** $A_h(\mathrm{e},\mathrm{d},\alpha)$ y $A'_h(\mathrm{e}',\mathrm{d}',\alpha')$ es una trasloafinidad de eje paralelo a los de las afinidades dadas.



4.- La composición de dos **afinidades homologicas de ejes concurrentes y la misma dirección,** $A_h(\text{e},\text{d},\alpha)$ y $A'_h(\text{e}',\text{d},\alpha')$, es otra afinidad homológica con eje concurrente con los anteriores en el mismo punto e igual dirección, $A_h''(\text{e}'',\text{d},\alpha'')$.

- Dado el triángulo ABC y sus transformados: $A'B'C'=A_h(ABC)$ y $A''B''C''=A_h'(A'B'C')$, por el teorema de Desargues, al tener sus vértices en rectas paralelas sus lados concurren en puntos colineales que determinan el eje e" de la afinidad A_h''.

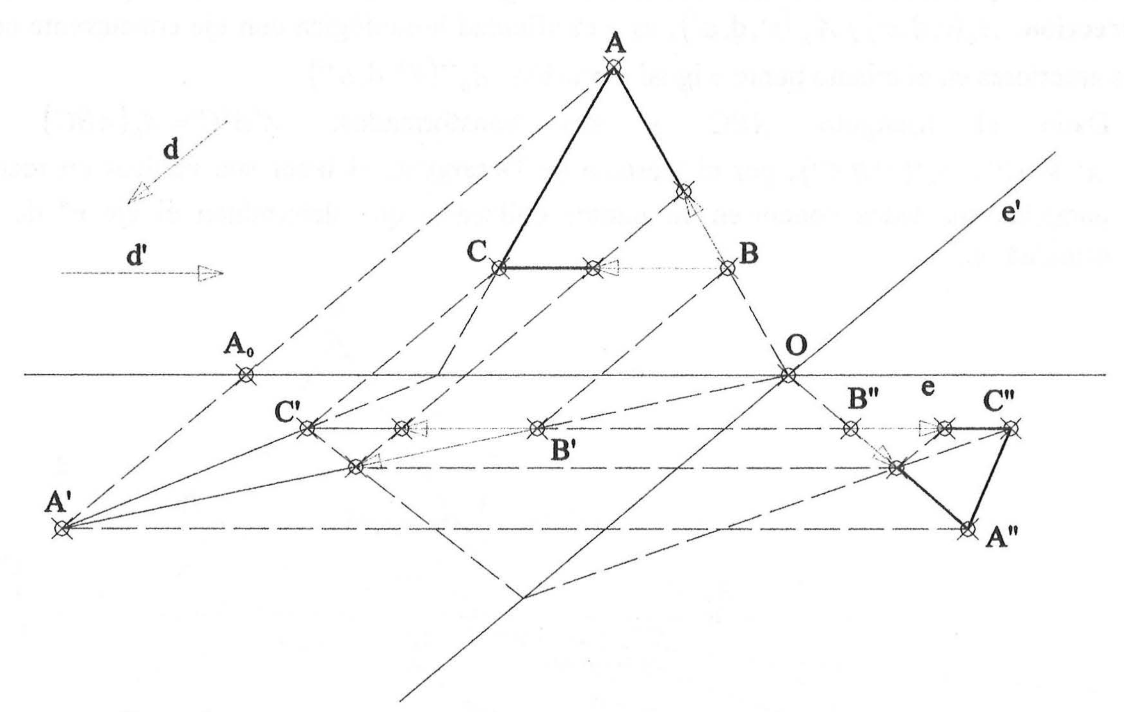


AFINIDAD CENTRAL:

- Se llama afinidad central a toda afinidad que mantiene un único punto doble.
- Se representa por A_{CO}.
- La composición de dos afinidades homológicas de ejes concurrentes en un punto O y distinta dirección es una afinidad central, siendo O el único punto doble, puesto que el único punto que se mantiene fijo en las dos afinidades es el de corte de ambos ejes.
- Afinidad central hiperbólica es aquella que tiene dos rectas dobles pero no de puntos dobles.
- Afinidad central parabólica es aquella que tiene una recta doble pero no de puntos dobles.
- Afinidad central elíptica es aquella que no tiene rectas dobles.

AFINIDAD CENTRAL HIPERBOLICA:

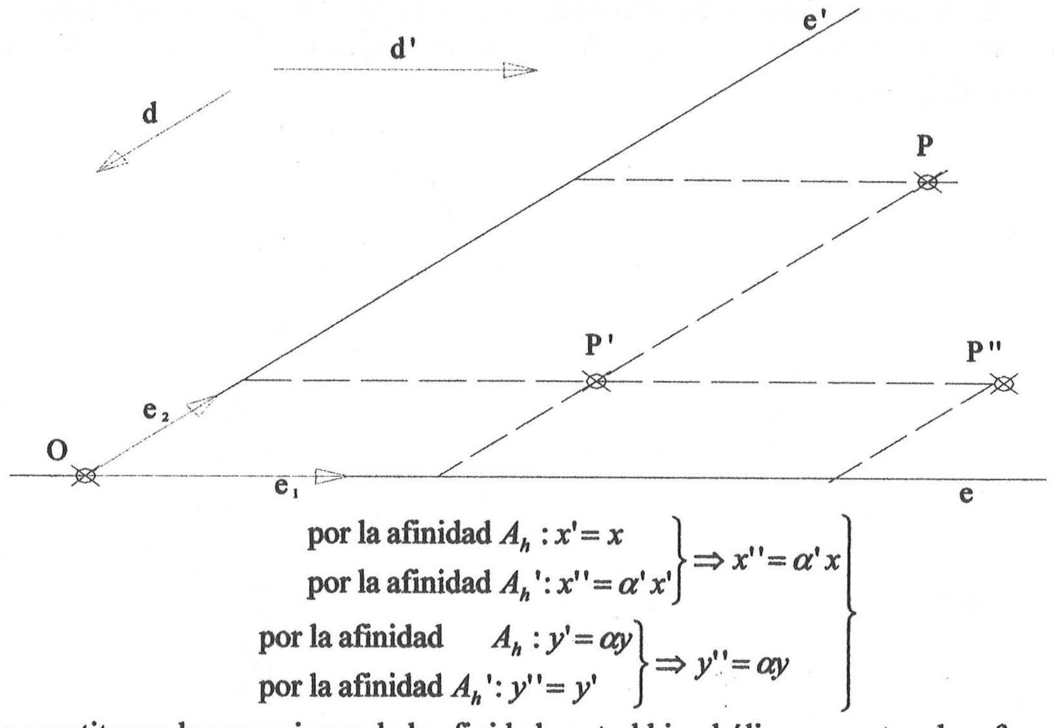
Es la composición de dos afinidades homológicas en las que la dirección de cada una de ellas es paralela al eje de la otra, $A_h(\mathrm{e},\mathrm{d},\alpha)$ y $A'_h(\mathrm{e}',\mathrm{d}',\alpha')$.



Ecuaciones:

Si tomamos como referencia $\{O,e_1,e_2\}$ compuesta por O, el centro de la afinidad es decir el punto de corte de los ejes e y e', $e_1=\mathrm{d}'$ y $e_2=\mathrm{d}$, las coordenadas de un punto genérico P y la de sus transformados $P'=A_h(P)$ y $P''=A_h'(P')$ serán:

$$P=(x,y),\ P'=(x',y')\text{ y }P''=(x'',y'')$$



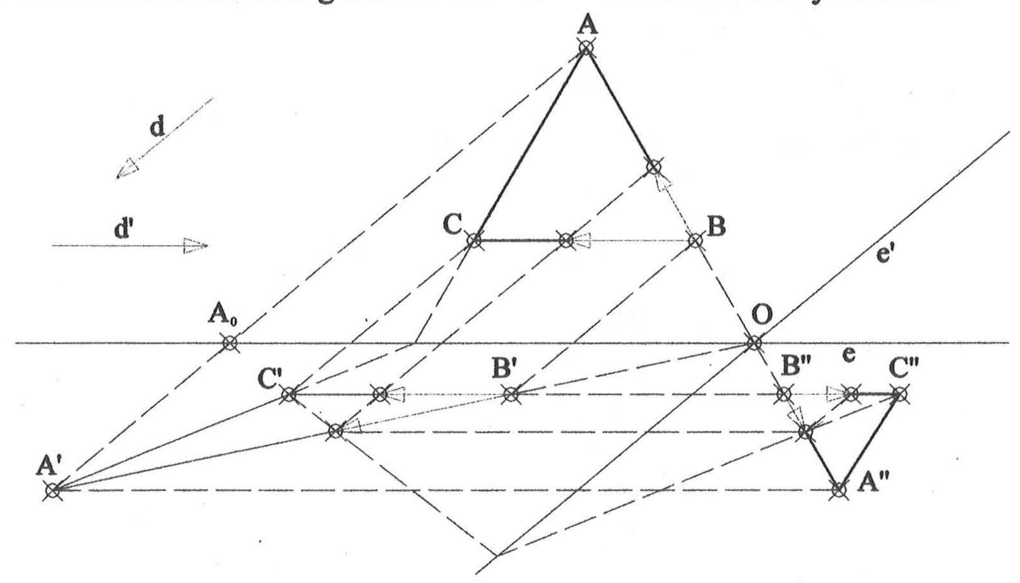
$$\left.\begin{array}{l}\text{por la afinidad } A_h : x' = x \\ \text{por la afinidad } A_h' : x'' = \alpha' x'\end{array}\right\} \Rightarrow x'' = \alpha' x$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{por la afinidad } A_h : y' = \alpha y \\ \text{por la afinidad } A_h' : y'' = y'\end{array}\right\} \Rightarrow y'' = \alpha y$$

que constituyen las ecuaciones de la afinidad central hiperbólica respecto a la referencia anteriormente mencionada.

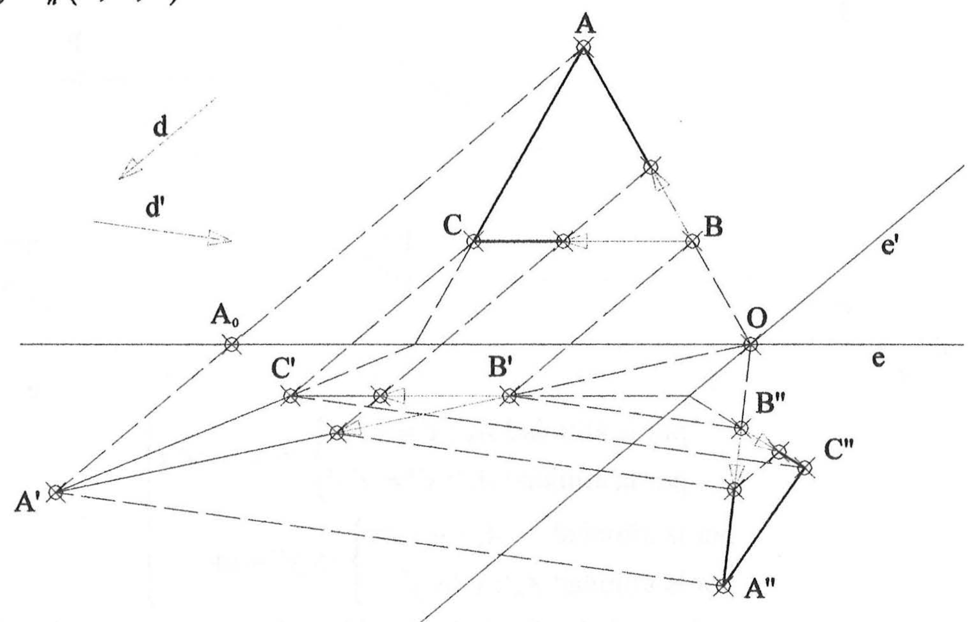
$$\begin{pmatrix}1\\x''\\y''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & \alpha' & 0\\0 & 0 & \alpha\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

- La inversa de una afinidad central hiperbólica es otra afinidad central hiperbólica con los mismos ejes, el mismo centro y características recíprocas.
- Si ambas características son del mismo signo es acorde, si son de distinto signo es discorde.
- Si las dos características son iguales es una **homotecia** de centro O y raz6n α .

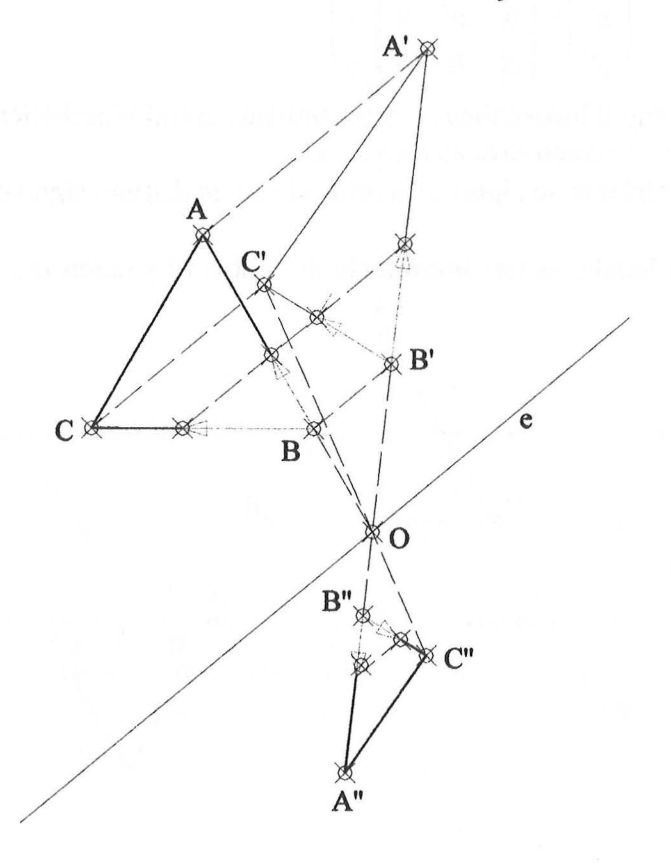


AFINIDAD CENTRAL PARABOLICA:

Es la composición de dos afinidades homológicas, con la misma característica y en las que la dirección de una de ellas es paralela al eje de la otra, $A_h(\mathrm{e}, \mathrm{d}, \alpha)$ y $A'_h(\mathrm{e}', \mathrm{d}', \alpha)$.



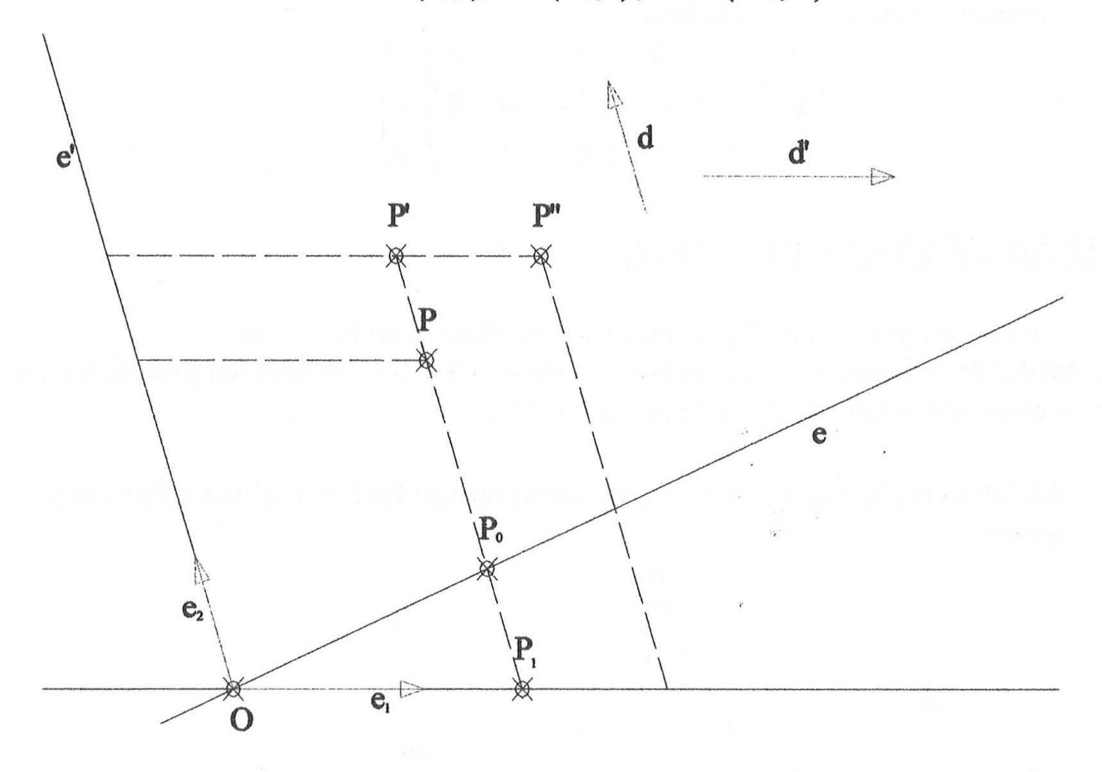
- Una afinidad central parabólica también se puede obtener como la composición de una afinidad homológica especial de eje e y una homotecia con centro O situado en dicho eje.



Ecuaciones:

Si tomamos como referencia $\{O, e_1, e_2\}$, compuesta por O, el centro de la afinidad es decir el punto de corte de los ejes e y e', $e_1 = \mathrm{d}'$ y $e_2 = \mathrm{d}$ (fig.28.), las coordenadas de un punto genérico P y la de sus transformados $P' = A_h(P)$ y $P'' = A_h'(P')$ serán:

$$P = (x, y), P' = (x', y') \text{ y } P'' = (x'', y'')$$



$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \text{por } A_h: \\ \alpha\overline{P_0P} = \overline{P_0P'} \\ y' = \overline{P_1P_0} + \overline{P_0P'} \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \overline{P_1P_0} + \alpha\overline{P_0P} \\ y = \overline{P_1P_0} + \overline{P_0P} \Rightarrow \overline{P_0P} = y - \overline{P_1P_0} \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \overline{P_1P_0} + \alpha\left(y - \overline{P_1P_0}\right) \\ \text{además se verifica}: \overline{P_1P_0} = \partial x \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \partial(1-\alpha)x + \alpha y$$

$$\left.\begin{array}{l} y' = \partial(1-\alpha)x + \alpha y \\ \text{y por la segunda afinidad } A_h': y'' = y' \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow y'' = \partial(1-\alpha)x + \alpha y \\ \left.\begin{array}{l} \text{por la primera afinidad } A_h: x' = x \\ \text{por la segunda } A_h': x'' = \alpha x \end{array}\right\} \Rightarrow x'' = \alpha x \end{array}\right\}$$

que constituyen las ecuaciones de la afinidad central hiperbólica respecto a la referencia anteriormente mencionada.

$$\begin{pmatrix}1\\x''\\y''\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&\alpha&0\\0&\partial(1-\alpha)&\alpha\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

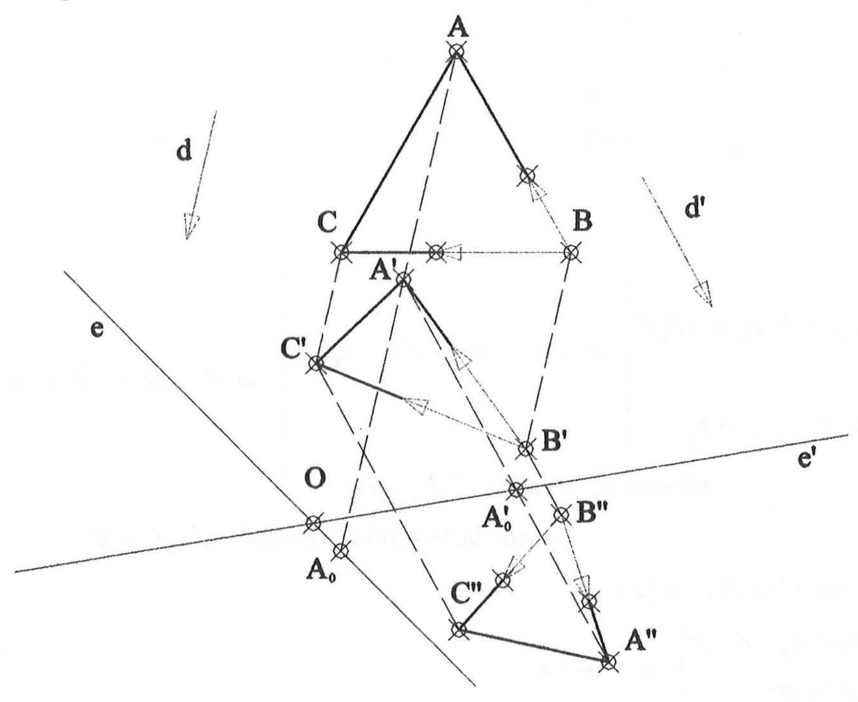
- **Se puede encontrar un vector e_1 con la dirección de d' de modo tal que el coeficiente de proporcionalidad ∂ tuviese el valor $\partial=\frac{1}{1-\alpha}$, de modo que las ecuaciones quedarían de la forma:**

$$\begin{pmatrix}1\\x''\\y''\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\alpha&0\\0&1&\alpha\end{pmatrix}\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\\hline 0&\alpha&0\\0&1&\alpha\end{array}\right)\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}$$

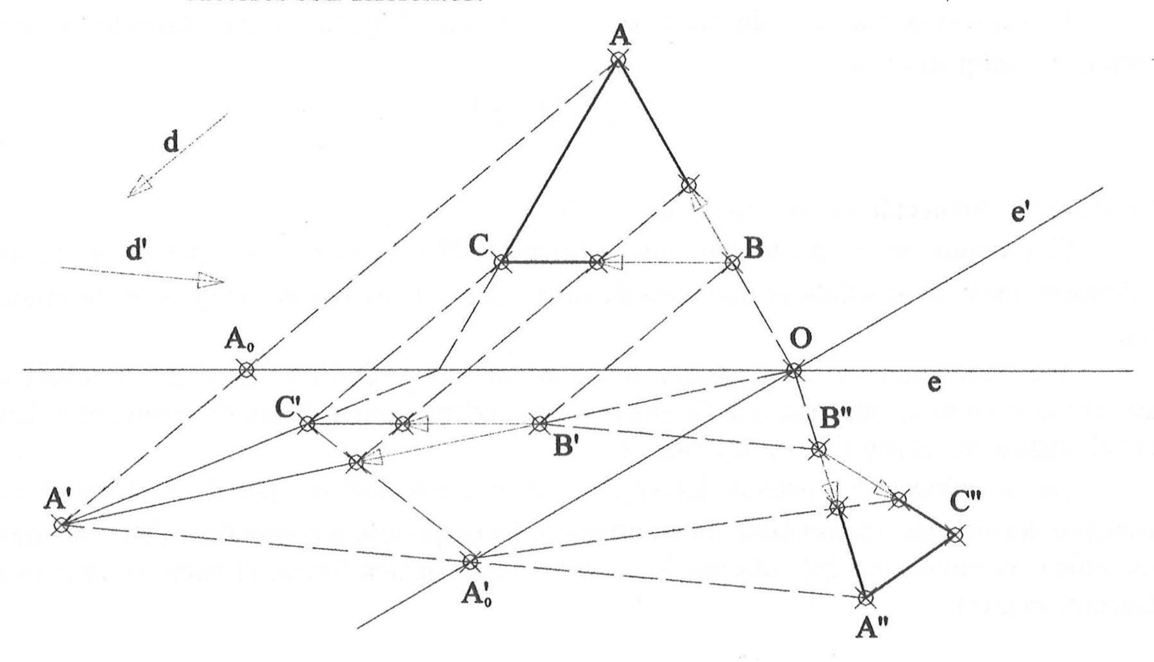
AFINIDAD CENTRAL ELIPTICA:

Es la composición de dos afinidades homológicas en las que la dirección de cada una no es paralela al eje de la otra y no conserva ninguna dirección en el plano invariante $A_h(\mathrm{e},\mathrm{d},\alpha)$ y $A'_h(\mathrm{e}',\mathrm{d}',\alpha')$,

- Afinidad central elíptica en la que las constantes de las dos afinidades factores son iguales:



- Afinidad central elíptica en la que las constantes de las dos afinidades factores son diferentes:



Ecuaciones:

Al no mantener ninguna dirección invariante, la matriz A asociada a la aplicación lineal respecto de cualquier referencia no se puede reducir será:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

si tomamos como origen el punto fijo O, es decir la referencia es $\Re = \{O, e_1, e_2\}$, con dos direcciones e_1 y e_2 cualquiera, las coordenadas de un punto genérico P y la de su transformado $P'' = A_h' \circ A_h(P)$ serán:

$$P = (x, y) \text{ y } P'' = (x'', y'')$$

y las ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} x'' &= ax + by \\ y'' &= cx + dy \end{aligned}\right\}$$

la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

Afinidades en el plano.

La expresión matricial de las ecuaciones de una afinidad (f,φ), respecto de una referencia cualquiera son :

$$Y=\left(\begin{array}{c|c}1 & 0\\ \hline P & A\end{array}\right)X$$

que al ser una biyección es una matriz inversible.

Si estamos en el plano con una referencia $\Re=\{O,e_1,e_2\}$, la matriz A de la aplicación lineal φ asociada es cuadrada de orden dos y la matriz de bloques es de orden tres.

A continuación vamos a estudiar todas las formas posibles de la matriz asociada a una afinidad en el plano, cada una de ellas corresponderán una afinidad diferente, el orden será el mismo que el seguido su descripción.

Las soluciones del sistema $(A-I)X=-P$ son los puntos fijos de la afinidad, la discusión del sistema, (compatible indeterminado, incompatible o compatible determinado) nos indica la dimensión del subespacio de puntos invariantes (recta, el vacío o un punto respectivamente):

Afinidades que mantienen una recta de puntos invariantes:

- $Rg(A-I)=Rg(A-I/P)=1$

Si tienen una recta de puntos invariantes para obtener las ecuaciones reducidas tomamos como referencia, $\Re=\{O,e_1,e_2\}$, siendo el origen O un punto fijo del eje, e_1 un vector con la dirección del eje y e_2 un vector cualquiera no colineal con el anterior.

El vector e_1, al estar sobre el eje es autovector de la aplicación lineal asociada, es decir $\varphi(e_1)=e_1$, luego la matriz A tendrá la forma:

$$A=\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & d\end{pmatrix}.$$

Por otra parte, al ser el origen invariante $P=0$ y la matriz de la afinidad resulta:

$$\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & b\\ 0 & 0 & d\end{array}\right)$$

- Si $d\neq 1$, $d=\alpha$ es otro autovalor de φ, será una **afinidad homológica** y podremos encontrar otra base con el vector e_2 perteneciente al subespacio propio $V(\alpha)$, es decir $\varphi(e_2)=\alpha e_2$, las ecuaciones quedarán de la forma:

$$Y=\left(\begin{array}{c|cc}1 & 0 & 0\\ \hline 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & \alpha\end{array}\right)X$$

Como caso particular si $d = \alpha = -1$ es una **simetría oblicua** de ecuaciones:

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right) X$$

- Si $d = 1$ es un autovalor doble, la dimensión de $V(1)$ puede ser:
  1. $\dim(V(1)) = 2$, $\varphi = e$ y al tener puntos invariantes es la **identidad**:

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) X$$

  2. $\dim(V(1)) = 1$, φ no es diagonalizable, $b \neq 0$, es una **afinidad homológica especial**, las ecuaciones serán:

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) X$$

  y si tomamos como referencia es $\Re = \{O, be_1, e_2\}$ las ecuaciones serán:

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) X$$

<u>Afinidades sin puntos invariantes:</u>

- $Rg(A - I) \neq Rg(A - I / P)$

Como el rango de la matriz ampliada puede ser como máximo dos, el rango de $(A - I)$ tiene que ser menor que dos; si $Rg(A - I) = 0 \Rightarrow A = I$ y sería una traslación, si $Rg(A - I) = 1 \neq Rg(A - I / P) = 2$ es una trasloafinidad, en todo caso, como el rango de dos matrices semejantes es el mismo, al menos un autovalor de la aplicación lineal asociada debe ser $\lambda = 1$.

Por tanto, si no tiene puntos fijos φ admite el autovalor $\lambda = 1$ y tomando una referencia $\Re = \{O, e_1, e_2\}$, donde e_1 es un vector tal que $e_1 \in V(1)$ las ecuaciones tendrán la forma::

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline e & 1 & b \\ f & 0 & d \end{array}\right) X$$

- Si $d = \alpha \neq 1$ la aplicación lineal asociada φ, tiene como autovalor α, es una **trasloafinidad** y si $e_2 \in V(\alpha)$ las ecuaciones serán:

$$Y=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline e&1&0\\ f&0&\alpha\end{array}\right)X$$

además si la referencia es $\Re=\{O,ee_1,e_2\}$ las ecuaciones son:

$$Y=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 1&1&0\\ 0&0&\alpha\end{array}\right)X$$

- Si $d=1$, tiene un autovalor doble igual a 1 y la dimensión del subespacio propio puede ser:
  1. $\dim(V(1))=2$, la aplicación lineal asociada es la identidad, $\varphi=e$ y es una **traslación** de vector $u\neq \underline{0}$, si en la referencia hacemos $e_1=u$ las ecuaciones serán:

     $$Y=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 1&1&0\\ 0&0&1\end{array}\right)X$$

  2. $\dim(V(1))=1$, la aplicación lineal no es diagonalizable, es una **trasloafinidad especial**, sus ecuaciones son:

     $$Y=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline e&1&b\\ f&0&1\end{array}\right)X$$

     y podemos encontrar una referencia $\Re=\{O,fbe_1,e_2=u\}$ respecto la que l as ecuaciones sean:

     $$Y=\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 0&1&1\\ 1&0&1\end{array}\right)X$$

Afinidades con un punto invariante:

- $Rg(A-I)=Rg(A-I/P)=2$

En la referencia $\Re=\{O,e_1,e_2\}$, que utilizaremos para obtener las ecuaciones reducidas tomaremos como origen el punto fijo de la afinidad, como O es invariante la matriz será de la forma:

$$\left(\begin{array}{c|cc}1&0&0\\ \hline 0&a&b\\ 0&c&d\end{array}\right)$$

- Si la aplicación lineal asociada tiene dos autovalores α y α' diferentes, es una **afinidad central hiperbólica**, tomando como referencia $\Re = \{O, e_1, e_2\}$, tal que $e_1 \in V(\alpha')$ y $e_2 \in V(\alpha)$, las ecuaciones, al ser $\varphi(e_1) = \alpha' e_1$ y $\varphi(e_2) = \alpha e_2$, serán:

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha' & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{array}\right) X$$

- Si φ tiene dos autovalores iguales la dimensión del subespacio propio puede ser:
    1. $\dim(V(\alpha)) = 2$, la aplicación lineal es diagonalizable, es una **homotecia** (caso particular de la afinidad central hiperbólica), sus ecuaciones son:

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{array}\right) X$$

    2. $\dim(V(\alpha)) = 1$, la aplicación lineal no es diagonalizable, es una **afinidad central parabólica**, respecto de una referencia $\Re = \{O, ce_1, e_2\}$ siendo e_2 un vector propio, $\varphi(e_2) = \alpha e_2$, las ecuaciones son:

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{array}\right) X$$

- Si la aplicación lineal asociada no tiene autovalores reales, no conserva ninguna dirección invariante, es un afinidad central elíptica, se puede encontrar una referencia $\Re = \{O, ce_1, e_2\}$ respecto la cual las ecuaciones son:

$$Y = \left(\begin{array}{c|cc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \alpha & b \\ 0 & 1 & d \end{array}\right) X$$

NOTAS

NOTAS

NOTAS

CUADERNO

107.01

CATÁLOGO Y PEDIDOS EN
http://www.aq.upm.es/of/jherrera
jherrera@aq.upm.es

